第2章 機　率

2-1 條件機率與獨立事件

重點整理

一、機率的性質

設 S 是某一試驗的樣本空間，A 是樣本空間 S 的任一事件。

1. 對於任意事件 A，其發生的機率必定大於或等於 0，小於或等於 1。

   說明：$P(A)\geq 0$，$P(A)\leq 1$，即 $0\leq P(A)\leq 1$。

2. 必然事件發生的機率等於 1；不可能事件發生的機率等於 0。

   說明：S 的必然事件就是 S，必然發生，所以 $P(S)=1$。不可能事件就是 $\varnothing$，不含樣本點，所以 $P(\varnothing)=0$。

3. 若事件 A 與事件 B 互斥（即不可能同時發生），則 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$。

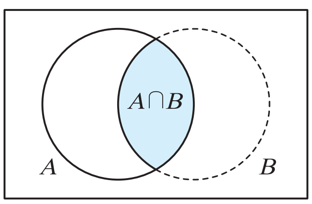
   說明：A、B 互斥即 $A\cap B=\varnothing$，$P(A\cap B)=P(\varnothing)=0$，所以
   $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)$。

4. 若事件 A' 為事件 A 的餘事件，則 $P(A')=1-P(A)$。

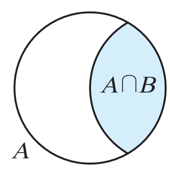
   說明：因為 $P(A)+P(A')=1$，所以 $P(A')=1-P(A)$。

二、條件機率

如下圖，在事件 A 發生的條件（condition）下，討論事件 B 發生的機率，相當於把 A 看成樣本空間，討論事件 $A\cap B$ 的機率。也就是說，樣本空間改變了。



相當於把 A 看成樣本空間



1. 條件機率：

   設 A，B 為樣本空間 S 中的兩事件，且 $P(A)>0$。則在事件 A 發生的條件下，事件 B 發生的條件機率為 $P(B\mid A)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$。

   例：擲一顆公正骰子一次，已知擲出點數大於 1，試求擲出奇數點的機率。

   解：設擲出點數大於 1 的事件為 $A=\{2,3,4,5,6\}$，
   擲出奇數點的事件為 $B=\{1,3,5\}$，
   因為 $A\cap B=\{3,5\}$，故所求機率為 $P(B\mid A)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}=\dfrac{2}{5}$。

2. 列聯表：

把資料依照屬性的變項用一張表來呈現，這張表稱為列聯表（contingency table）。

例：班上有男生 20 人、女生 16 人，某日調查上學方式，發現男生有 5 人步行上學，女生有 3 人步行上學。已知沒有步行的同學都是乘車上學，則以列聯表呈現資料如下左表：

	步行	乘車	合計
男生	5		20
女生	3		16
合計			

推算如右表

	步行	乘車	合計
男生	5	15	20
女生	3	13	16
合計	8	28	36

故知全班 36 人當中，有 8 人步行上學，28 人乘車上學。

三、獨立事件

1. 獨立事件：

如果事件 A 發生與否，不影響另一事件 B 的機率，我們就說 A、B 是獨立事件，也就是 $P(B|A)=P(B)$，由條件機率的定義知 $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$，所以 $\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=P(B)$，移項得 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$。

2. 兩事件為獨立事件：

設 A，B 為樣本空間 S 中的兩事件，若 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$，則稱 A，B 為獨立事件。

例：擲一顆公正骰子一次，令 A 表示擲出奇數點的事件，B 表示擲出 1 點或 2 點的事件，C 表示擲出偶數點的事件，D 表示擲出 1 點或 3 點的事件。

因為 $P(A)=\dfrac{1}{2}$，$P(B)=\dfrac{1}{3}$，$P(C)=\dfrac{1}{2}$，$P(D)=\dfrac{1}{3}$，

$P(A\cap B)=\dfrac{1}{6}$，$P(A\cap C)=0$，$P(A\cap D)=\dfrac{1}{3}$。

顯然，$P(A\cap B)=\dfrac{1}{6}$，且 $P(A)P(B)=\dfrac{1}{6}$，所以 A、B 是獨立事件。

$P(A\cap C)=0$，但 $P(A)P(C)=\dfrac{1}{4}$，所以 A、C 不是獨立事件。

$P(A\cap D)=\dfrac{1}{3}$，但 $P(A)P(D)=\dfrac{1}{6}$，所以 A、D 不是獨立事件。

3. 餘事件的獨立性：

若 A，B 為獨立事件，則 A'，B 為獨立事件，A，B' 為獨立事件，A'，B' 為獨立事件。

例題 1　機率性質的應用(一)

小倫騎著腳踏車在鄉間小路閒逛，在每個十字路口必須決定直行、向右轉或向左轉。已知他向右轉的機率是 0.3，向左轉的機率是 0.2，試求：

(1) 他決定轉彎的機率。（3 分）

(2) 他決定直行的機率。（3 分）

(3) 他決定下車的機率。（4 分）

解 令 A、B、C 代表直行、向右轉、向左轉這三個事件

顯然，樣本空間由 A、B、C 這三個事件構成，而且它們彼此互斥

(1) 轉彎的機率：$P(B\cup C)=P(B)+P(C)=0.3+0.2=0.5$

(2) 直行的機率：$P(A)=1-P(B\cup C)=1-0.5=0.5$

(3) 下車的機率：此為不可能事件 $\varnothing$　$\therefore P(\varnothing)=0$

例題 2　機率性質的應用(二)

擲一顆公正的骰子，試求：

(1) 出現 7 點的機率。（5 分）

(2) 出現點數大於 0 小於 7 的機率。（5 分）

解 樣本空間 $S=\{1，2，3，4，5，6\}$

(1) 出現 7 點的事件為 $\varnothing$，是不可能事件，機率為 0

(2) 出現點數大於 0 小於 7 的事件為 $\{1，2，3，4，5，6\}$，是必然事件，機率為 1

例題 3 機率性質的應用(三)

粗心的水果行店員不小心將 3 個售價 30 元的蘋果與 9 個售價 20 元的蘋果放在一起，並以 20 元的價格出售。試問：

(1) 任意選一個，選到原價 30 元蘋果的機率是多少？（5 分）

(2) 小偉從 12 個蘋果中隨意買了 4 個，試求他至少買到一個原價 30 元蘋果的機率。（5 分）

解

(1) 所求機率為 $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

(2) 樣本空間 S 有 C^{12}_4 個元素，即 $n(S)=C^{12}_4$

令 A 為小偉所買都沒有原價 30 元的蘋果的事件，$n(A)=C^9_4$，得 $P(A)=\frac{C^9_4}{C^{12}_4}=\frac{14}{55}$

至少買到一個原價 30 元蘋果的事件為 A'，故所求為 $P(A')=1-\frac{14}{55}=\frac{41}{55}$

例題 4 機率的性質

(1) 已知 $P(A)=\frac{2}{3}$，$P(B)=\frac{1}{2}$，$P(A\cap B)=\frac{1}{4}$，試求：

① $P(A\cup B)$。（2 分）

② $P(A'\cap B')$。（2 分）

(2) 已知 $P(C)=\frac{1}{3}$，$P(D)=\frac{1}{2}$，$C\cap D=\varnothing$，試求：

① $P(C\cap D)$。（3 分）

② $P(C\cup D)$。（3 分）

解

(1) ① $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{11}{12}$

② $P(A'\cap B')=P(A\cup B)'=1-P(A\cup B)=1-\frac{11}{12}=\frac{1}{12}$

(2) ① 因為 $C\cap D=\varnothing$，所以 $P(C\cap D)=0$

② $P(C\cup D)=P(C)+P(D)-P(C\cap D)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-0=\frac{5}{6}$

例題 5　條件機率

檢視段考成績，全班有 20 人數學及格，有 28 人英文及格，有 16 人數學與英文都及格。現在任意抽選一位同學，試問：

(1) 若這位同學數學及格，則他英文及格的機率是多少？(5 分)

(2) 若這位同學英文及格，則他數學及格的機率是多少？(5 分)

解　設 A、B 分別代表數學、英文及格的事件，則 $n(A)=20$，$n(B)=28$，$n(A\cap B)=16$

(1) 所求機率為 $P(B\mid A)=\dfrac{n(B\cap A)}{n(A)}=\dfrac{16}{20}=\dfrac{4}{5}$

(2) 所求機率為 $P(A\mid B)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(B)}=\dfrac{16}{28}=\dfrac{4}{7}$

例題 6　列聯表在條件機率的應用

同學會聚餐，每人各點一杯飲料。餐廳所提供的飲料只有紅茶或咖啡兩種，並有大杯或小杯可以選擇。已知紅茶合計點 17 杯，其中有 9 杯是小杯；咖啡則是大杯 12 杯、小杯 6 杯。請利用列聯表回答下列問題：

(1) 小雯點了小杯飲料，試求她點紅茶的機率。(5 分)

(2) 小輝點了咖啡，試問他點大杯的機率。(5 分)

解

	大	小	合計
紅茶	8	9	17
咖啡	12	6	18
合計	20	15	35

依題意完成列聯表如上

(1) 所求機率為 $P(\text{紅茶}\mid\text{小杯})=\dfrac{n(\text{小杯紅茶})}{n(\text{小杯})}=\dfrac{9}{15}=\dfrac{3}{5}$

(2) 所求機率為 $P(\text{大杯}\mid\text{咖啡})=\dfrac{n(\text{大杯咖啡})}{n(\text{咖啡})}=\dfrac{12}{18}=\dfrac{2}{3}$

例題 7　檢驗兩事件是否獨立

擲一顆公正骰子一次，令事件 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{1,3,5\}$，$C=\{3,4,5,6\}$，試問：

(1) A 與 B 是否為獨立事件？（5 分）

(2) A 與 C 是否為獨立事件？（5 分）

解

$P(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$，$P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，$P(C)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

(1) $A\cap B=\{1,3\}$，得 $P(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，

且 $P(A)P(B)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$，得 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$，故 A 與 B 是獨立事件

(2) $A\cap C=\{3,4\}$，得 $P(A\cap C)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，

但 $P(A)P(C)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$，即 $P(A\cap C)\neq P(A)P(C)$，故 A 與 C 不是獨立事件

例題 8　獨立事件公式的應用

甲、乙兩人一起打靶，已知命中率分別為 $\frac{2}{3}$、$\frac{3}{4}$，且兩人命中靶面的事件為獨立事件。今兩人各射擊 1 發，試求：

(1) 兩人都命中的機率。（5 分）

(2) 靶面至少中 1 發的機率。（5 分）

解

設 A、B 分別為甲、乙命中靶面的事件，$P(A)=\frac{2}{3}$，$P(B)=\frac{3}{4}$

(1) $\because$ A、B 為獨立事件，故所求為 $P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$

(2) 所求為 $1-$兩人都沒命中的機率，即 $1-P(A'\cap B')$

$\because$ A、B 為獨立事件　$\therefore$ A'、B' 也是獨立事件，可得 $P(A'\cap B')=P(A')P(B')$

故所求機率為 $1-P(A'\cap B')=1-P(A')P(B')=1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{11}{12}$

例題 9　獨立事件與列聯表的應用

甲、乙兩所國中學生申請入學當地一所高中，預定錄取 468 名。已知報名人數為甲校 400 人，乙校 432 人。試問，當表中 a，b，c，d 分別為多少時，我們可以說是否錄取與就讀學校是獨立的？（10 分）

	錄取	未錄取
甲校	a	b
乙校	c	d

解 設甲校錄取 x 人，依題意作列聯表如下：

	錄取	未錄取	合計
甲校	x	$400-x$	400
乙校	$468-x$	$x-36$	432
合計	468	364	832

依題意，甲校學生且錄取的機率 = 甲校學生的機率 × 錄取的機率

即 $\dfrac{x}{832}=\dfrac{400}{832}\times\dfrac{468}{832}$，解得 $x=225$

故得 $a=225$，$b=175$，$c=243$，$d=189$

例題 10　獨立事件公式的計算

(1) 假設 A、B 為獨立事件，且 $P(A)=\dfrac{1}{3}$，$P(B)=\dfrac{3}{4}$，試求：

① $P(A\cap B')$。（2 分）　　② $P(A'\cap B')$。（2 分）

(2) 已知 C、D 是獨立事件，且 $P(C)=\dfrac{1}{2}$，$P(C\cup D)=\dfrac{3}{4}$，試求：

① $P(D)$。（3 分）　　② $P(D\mid C)$。（3 分）

解 (1) ① A、B 為獨立事件，則 A、B' 也是獨立事件

故 $P(A\cap B')=P(A)P(B')=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{12}$

② A、B 為獨立事件，則 A'、B' 也是獨立事件

故 $P(A'\cap B')=P(A')P(B')=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{6}$

(2) ① C、D 是獨立事件，故 $P(C\cap D)=P(C)P(D)$

$\because P(C\cup D)=P(C)+P(D)-P(C\cap D)$

$\therefore \dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{2}+P(D)-\dfrac{1}{2}P(D)\Rightarrow\dfrac{1}{2}P(D)=\dfrac{1}{4}$，故得 $P(D)=\dfrac{1}{2}$

② C、D 是獨立事件，D 發生的機率與 C 是否發生無關

故 $P(D\mid C)=P(D)=\dfrac{1}{2}$

〈另解〉

$P(D\mid C)=\dfrac{P(D\cap C)}{P(C)}=\dfrac{P(D)P(C)}{P(C)}=P(D)=\dfrac{1}{2}$