

4-2 乘法反方陣與矩陣的應用

重點整理

1. 二元一次方程組的矩陣表示：

將二元一次方程組用矩陣乘法表示，就可以用矩陣理論求解。

例：將二元一次方程組 $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ 表為 $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$ ，再用以下介紹的

反方陣乘法，可以得到 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ ，即 $x = 2$ ， $y = -1$ 。

2. 乘法反方陣：

(1) 乘法反方陣的意義：

設 A 是二階方陣，若能找到二階方陣 B 使得 $AB = BA = I_2$ ，則稱 B 是 A 的乘法反方陣，以 A^{-1} 表示。

例： $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$ 是二階方陣， $B = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 也是二階方陣，

$$\text{則因為 } AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{且 } BA = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

我們說 B 是 A 的乘法反方陣，記為 $A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 。

(2) 判定二階乘法反方陣是否存在及它的求法：

已知 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，若 $ad - bc \neq 0$ ，則 A 有乘法反方陣 A^{-1} ，反之亦然。

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}。$$

(a 、 d 交換位置， b 、 c 留在原來位置但變號一次)

例： $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ 是二階方陣， $2 \times 4 - 1 \times 7 = 1$ ，

$$\text{則 } A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}。$$

例： $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ 是二階方陣， $3 \times 4 - 2 \times 6 = 0$ ，

則 B^{-1} 不存在。



4-2

3. 利用矩陣解二元一次方程組：

將二元一次方程組 $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ ，寫成 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ (即 $AX = B$)，

則 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ (即 $X = A^{-1}B$)。

例：將二元一次方程組 $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 5x + 3y = 4 \end{cases}$ 寫成 $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ ，

因為 $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ ，我們有 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ ，

即 $x = 2$ ， $y = -2$ 。

4. 求方程組的解視為解向量的線性組合：

若要將平面向量 $\vec{c}$ 以 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 表示，首先假設 $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{c}$ ，其次改為矩陣形式表示，最後用乘法反方陣求解 x ， y 。

例：試將平面向量 $(4, 3)$ 表示成 $(3, 1)$ 與 $(-2, 1)$ 的線性組合。

假設 $(4, 3) = x(3, 1) + y(-2, 1)$ ，

寫成矩陣形式為 $x \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ ，即 $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ 。

利用乘法反方陣求解，得

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}，得 x = 2，$$

$y = 1$ ，即 $(4, 3) = 2(3, 1) + (-2, 1)$ 。

例題 1 線性方程組及其矩陣表示

(1) 將方程組 $\begin{cases} 8x - 5y = 13 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases}$ 以矩陣乘法表示。(5 分)

(2) 將 $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ 表為二元一次方程組。(5 分)

解

$$(1) \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{cases} x - 2y = 5 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$$



● 例題 2 用方程組解法求乘法反方陣

已知 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，試求 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 。(10 分)

解

由已知 $\begin{cases} a + 2c = 1 \\ b + 2d = 0 \\ 2a + 3c = 0 \\ 2b + 3d = 1 \end{cases}$ ，可得 2 個二元一次方程組 $\begin{cases} a + 2c = 1 \\ 2a + 3c = 0 \end{cases}$ 與 $\begin{cases} b + 2d = 0 \\ 2b + 3d = 1 \end{cases}$

(1) 解 $\begin{cases} a + 2c = 1 \cdots \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 2a + 3c = 0 \cdots \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$

$\textcircled{1} \times 2 - \textcircled{2}$ 得 $c = 2$ ，代入 $\textcircled{1}$ 得 $a = -3$

(2) 解 $\begin{cases} b + 2d = 0 \cdots \cdots \cdots \textcircled{3} \\ 2b + 3d = 1 \cdots \cdots \cdots \textcircled{4} \end{cases}$

$\textcircled{3} \times 2 - \textcircled{4}$ 得 $d = -1$ ，代入 $\textcircled{3}$ 得 $b = 2$

故得 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

● 例題 3 判定乘法反方陣是否存在並解之

二階方陣 $A = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ，試問：

(1) A 的乘法反方陣是否存在。(5 分)

(2) 若 A^{-1} 存在，試求 A^{-1} 。(5 分)

解 (1) 因為 $8 \times 2 - 5 \times 3 = 16 - 15 = 1 \neq 0$ ，所以 A 的乘法反方陣存在

(2) $A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$



4-2

翰林用心
教師用
精益求精

● 例題 4 用二階反方陣求解一元二次方程組

已知二元一次方程組 $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 4x + 3y = 6 \end{cases}$ ，試回答下列問題：

- (1) 將方程組寫成 $AX=B$ 的形式。(5 分)
- (2) 用 A 的乘法反方陣 A^{-1} 解方程組。(5 分)

解

$$(1) \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$(2) A^{-1} = \frac{1}{3 \times 3 - 2 \times 4} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{故 } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

● 例題 5 將平面向量表為向量的線性組合

試將平面向量 $\vec{c}=(1, -3)$ 表為平面向量 $\vec{a}=(2, -1)$ ， $\vec{b}=(3, 1)$ 的線性組合。(10 分)

解 設 $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$ ，即 $x(2, -1)+y(3, 1)=(1, -3)$ ，

寫成矩陣形式為 $x \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ ，即 $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

因為 $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ，所以 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

故得 $\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}$

● 例題 6 求二階方陣(一)

已知二階方陣 A 的乘法反方陣為 $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ ，試求方陣 A 。(5 分)

解 由已知， $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$

因為 $AA^{-1}=I$ ，等號兩邊右側同乘以 $(A^{-1})^{-1}$

得 $AA^{-1}(A^{-1})^{-1}=I(A^{-1})^{-1}$

即 $A=(A^{-1})^{-1}$ (乘法反方陣的乘法反方陣)

$$\text{故 } A = \frac{1}{-16+15} \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$



● 例題 7 求二階方陣(二)

已知二階方陣 A 使得 $A \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$, $A \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$, 試求方陣 A 。(5 分)

解 設 $A = \begin{bmatrix} x & s \\ y & t \end{bmatrix}$, 由題意得

$$\begin{bmatrix} x & s \\ y & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & s \\ y & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{乘開得} \begin{cases} x + 3s = -2 \\ y + 3t = 5 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2s = -2 \\ 2t = 2 \end{cases}$$

$$\text{解} \begin{cases} x + 3s = -2 \\ 2s = -2 \end{cases}, \quad \begin{cases} y + 3t = 5 \\ 2t = 2 \end{cases}$$

$$\text{得 } x = 1, y = 2, s = -1, t = 1$$

$$\text{故得 } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

● 例題 8 就實數 a 值討論矩陣的乘法反方陣

就實數 a 值討論二階方陣 $\begin{bmatrix} a & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ 的乘法反方陣是否存在。(10 分)

解 因為 $a \times 6 - 2 \times 3 = 6a - 6 = 6(a - 1)$

所以討論 $a - 1$ 是否為 0 即可

顯然, $a = 1$ 時, $a - 1 = 0$, 此時二階方陣 $\begin{bmatrix} a & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ 的乘法反方陣不存在

另一方面, $a \neq 1$ 時, $a - 1 \neq 0$, 此時二階方陣 $\begin{bmatrix} a & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ 的乘法反方陣存在

$$\left(\begin{bmatrix} a & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \text{ 的乘法反方陣 } \begin{bmatrix} a & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{6a-6} \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -3 & a \end{bmatrix} \right)$$



4-2

翰林用心
教師用
精益求精

● 例題 9 矩陣的應用 (加密與解密問題) (一)

某遊戲軟體要求玩家輸入一個點坐標 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ，然後立刻把它移動到另一個點，而且所有的點都依照 $A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ 的規則移動。小雯輸入一個點坐標以後，發現此點被移動到坐標為 $\begin{bmatrix} 30 \\ 50 \end{bmatrix}$ 的位置，但是卻忘了先前輸入的點坐標。聰明的小輝乃依序輸入三個參考點 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 、 $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ 、 $\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ ，發現分別移動到 $\begin{bmatrix} 5 \\ 15 \end{bmatrix}$ 、 $\begin{bmatrix} 10 \\ 25 \end{bmatrix}$ 、 $\begin{bmatrix} 15 \\ 20 \end{bmatrix}$ 的位置，因而解決小雯的問題。請根據這些資訊，回答下列問題：

- (1) 試求 $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ 。(5 分)
- (2) 試求 A 。(5 分)
- (3) 試求小雯輸入的原始點坐標。(5 分)

解 依據題意，可得 $A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 15 \end{bmatrix}$ ①

$$A \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 25 \end{bmatrix} \text{②}$$

$$A \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 20 \end{bmatrix} \text{③}$$

(1) 顯然 $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 15 \end{bmatrix}$

(2) 將 $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 15 \end{bmatrix}$ 代入②、③，得 $A \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$ 、 $A \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$

整理得 $A \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$ ，兩邊同除以 5，

得 $A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ，即 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

(3) 設 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 50 \end{bmatrix}$ ，得 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 35 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 25 \\ 35 \end{bmatrix} = \frac{1}{1-4} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 \\ 35 \end{bmatrix} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} -45 \\ -15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 5 \end{bmatrix}$$

故知小雯輸入的原始點坐標為 $\begin{bmatrix} 15 \\ 5 \end{bmatrix}$



● 例題 10 矩陣的應用(加密與解密問題)(二)

小雯設計一個密碼產生器，先用一個二階方陣 A 乘以行矩陣 X (原始資料)，再加上行矩陣

B 後輸出 Y ，也就是 $Y = AX + B$ 。假設 $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$ ， $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ，則：

(1) 若原始資料 $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ ，試求輸出資料 Y 。(5 分)

(2) 試求 A 的乘法反方陣 A^{-1} 。(5 分)

(3) 若小慧收到小雯傳來的輸出資料為 $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ ，試求它的原始資料矩陣。(5 分)

解

$$(1) Y = AX + B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 13 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$(2) A^{-1} = \frac{1}{5 \times 2 - 3 \times 3} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

(3) 設 $Y = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ ，所求原始資料矩陣為 X

$$\text{因為 } Y = AX + B, \text{ 得 } AX = Y - B = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{故得 } X = A^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{即原始資料矩陣為 } \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$



4-2

翰林用心
教師用
精益求精