

一、單選題（每題 5 分，共 10 分）

1. 一副撲克牌共有 52 張，有 4 種花色，分別是黑桃、紅心、方塊、梅花；每種花色都有 13 種點數，分別是 2、3、4、5、6、7、8、9、10、J、Q、K、A。小慧將一副撲克牌均勻洗牌後，任意抽出 1 張，已知花色是黑桃，則這張牌是黑桃 7 的機率為下列何者？

(A) $\frac{1}{52}$

(B) $\frac{1}{13}$

(C) $\frac{4}{13}$

(D) $\frac{7}{13}$

(E) $\frac{1}{4}$

解

$$\text{所求機率為 } P(\text{黑桃 } 7 | \text{黑桃}) = \frac{n(\text{黑桃且為 } 7 \text{ 點})}{n(\text{黑桃})} = \frac{1}{13}$$

故選(B)

2. 已知樣本空間有 A 、 B 兩事件， A 事件發生的機率為 0.7， B 事件發生的機率為 0.3， A 發生且 B 發生的機率為 0.2，則 A 發生或 B 發生的機率為下列何者？

(A) 0.21

(B) 0.3

(C) 0.7

(D) 0.8

(E) 1

解

$$\text{由已知可得，} P(A) = 0.7, P(B) = 0.3, P(A \cap B) = 0.2$$

$$\text{則所求機率為 } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.7 + 0.3 - 0.2 = 0.8$$

故選(D)



二、多選題（每題 5 分，所有選項均答對者得 5 分，錯一個選項得 3 分，錯兩個選項得 1 分，其餘不給分，共 10 分）

3. 設 A 、 B 為獨立事件，且 $P(A) = \frac{1}{3}$ ， $P(B) = \frac{2}{3}$ ，則下列哪些正確？

- (A) A 、 B 為互斥事件 (B) $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ (C) $P(A \cap B') = \frac{1}{9}$
 (D) $P(A' \cap B) = \frac{2}{9}$ (E) $P(A' \cap B') = \frac{2}{9}$

解 (A) $\times$ ： A 、 B 為獨立事件

$$\therefore P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9} \neq 0, \text{ 故 } A、B \text{ 非互斥事件}$$

(B) $\times$ ：由(A)的討論知 $P(A \cap B) = \frac{2}{9}$

(C) $\circ$ ： A 、 B 為獨立事件，則 A 、 B' 也是獨立事件

$$\therefore P(A \cap B') = P(A)P(B') = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

(D) $\times$ ： A 、 B 為獨立事件，則 A' 、 B 也是獨立事件

$$\therefore P(A' \cap B) = P(A')P(B) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

(E) $\circ$ ： A 、 B 為獨立事件，則 A' 、 B' 也是獨立事件

$$\therefore P(A' \cap B') = P(A')P(B') = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

故選(C)(E)

4. 設 A 、 B 為獨立事件，若 $P(A) = \frac{1}{3}$ ， $P(B) = \frac{1}{3}$ ，試選出正確選項。

- (A) $P(A) = P(A|B)$ (B) $P(A|B) = P(B|A)$ (C) $P(A|B) = \frac{1}{9}$
 (D) $P(A'|B) = \frac{2}{3}$ (E) $P(B|A') = \frac{2}{9}$

解 (A) $\circ$ ：由獨立事件的定義可知， B 事件發生與否，不影響 A 事件發生的機率
 因此 $P(A) = P(A|B)$

$$(B) \circ : P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, P(A) = \frac{1}{3} = P(B)$$

$$\text{故 } P(A|B) = P(B|A)$$

(C) $\times$ ： $\because A$ 、 B 為獨立事件 $\therefore P(A|B) = P(A) = \frac{1}{3}$

(D) $\circ$ ： A 、 B 為獨立事件，則 A' 、 B 也是獨立事件 $\therefore P(A'|B) = P(A') = \frac{2}{3}$

(E) $\times$ ： A 、 B 為獨立事件，則 A' 、 B 也是獨立事件 $\therefore P(B|A') = P(B) = \frac{1}{3}$

故選(A)(B)(D)



三、填充題（每格 5 分，共 60 分）

5. 為了慶祝校慶，話劇社演出一齣舞台劇。已知演員都是高一生或高二生，且女生有 9 名，男生有 7 名；高二演員中女生有 6 名、男生有 4 名。假設指導老師任選一名演員在演出前先對觀眾做解說，試求：

- (1) 已知這名演員是高二生的情況下，是女生的機率為_____。
 (2) 已知這名演員是男生的情況下，是高二生的機率為_____。

解 依條件作列聯表，並計算相關數據如下：

	高二	高一	小計
女	6	3	9
男	4	3	7
小計	10	6	16

(1) 所求機率為 $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

(2) 所求機率為 $\frac{4}{7}$

6. 甲、乙兩人參加校內桌球比賽，根據平常練習與經驗判斷，甲、乙進入決賽的機率依序為 $\frac{3}{4}$ 、 $\frac{1}{3}$ ，且兩人能否進入決賽是獨立事件，試求：

- (1) 兩人中至少有一人進入決賽的機率為_____。
 (2) 兩人中恰有一人進入決賽的機率為_____。

解 設 A 、 B 分別代表甲、乙進入決賽的事件，

則甲、乙進入決賽的機率分別為 $P(A) = \frac{3}{4}$ 、 $P(B) = \frac{1}{3}$

- (1) 兩人中至少有一人進入決賽的機率為

$$1 - P(A' \cap B') = 1 - P(A')P(B') = 1 - \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$$

- (2) 兩人中恰有一人進入決賽的機率為

$$P(A \cap B') + P(A' \cap B) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$$

7. 甲、乙兩人同時解一數學問題，根據過去的經驗，甲每 3 題能解出 2 題，乙每 4 題能解出 3 題，已知兩人解題互不影響，試求：

(1) 恰有一人解出的機率為_____。

(2) 此題被解出的機率為_____。

解

設 A 、 B 分別代表甲、乙解出此題的事件，則 $P(A) = \frac{2}{3}$ ， $P(B) = \frac{3}{4}$

(1) 所求為甲解出且乙未解出的機率，或甲未解出且乙解出的機率，即

$$P(A \cap B') + P(A' \cap B) = P(A)P(B') + P(A')P(B) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{5}{12}$$

(2) 所求機率為 $1 -$ 甲未解出且乙未解出的機率，即

$$1 - P(A' \cap B') = 1 - P(A')P(B') = 1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{11}{12}$$

8. 桌上有甲、乙兩個袋子，甲袋有 2 個紅球、3 個白球，乙袋有 4 個紅球、1 個白球。小偉擲 1 顆公正的骰子一次，若出現點數大於 2，則從甲袋抽出 1 球，否則從乙袋抽出 1 球，同一袋球取出的機會均等。試求：

(1) 抽出紅球的機率為_____。

(2) 承(1)，此紅球來自乙袋的機率為_____。

解

設 S 為擲 1 顆公正骰子一次的樣本空間，即 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

設事件 A 、 B 分別代表擲出點數大於 2、點數不大於 2 的事件

即 $A = \{3, 4, 5, 6\}$ ， $B = \{1, 2\}$ ，得 $P(A) = \frac{2}{3}$ 、 $P(B) = \frac{1}{3}$

故選到甲、乙袋的機率分別為 $\frac{2}{3}$ 、 $\frac{1}{3}$

(1) 抽出紅球的機率為 $\frac{2}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{8}{15}$

(2) 由貝氏定理，此紅球來自乙袋的機率為 $\frac{\frac{4}{15}}{\frac{8}{15}} = \frac{1}{2}$



9. 甲、乙兩人同時打靶，每人一發，已知甲、乙命中率依序為 0.5，0.3，且兩人命中靶面的事件為獨立事件，試求：

- (1) 靶面恰中一發的機率為_____。
- (2) 靶面恰中一發，且是由乙命中的機率為_____。

解 設 A 、 B 分別代表甲、乙命中靶面的事件，則 $P(A)=0.5$ ， $P(B)=0.3$

$$\begin{aligned}
 (1) \text{ 所求機率為 } & P(A \cap B') + P(A' \cap B) \\
 &= P(A)P(B') + P(A')P(B) \\
 &= 0.5 \times 0.7 + 0.5 \times 0.3 \\
 &= 0.35 + 0.15 \\
 &= 0.5
 \end{aligned}$$

$$(2) \text{ 由貝氏定理，所求機率為 } \frac{0.15}{0.50} = \frac{3}{10}$$

10. 設 A 、 B 是樣本空間 S 的兩事件，且 $P(A)=\frac{2}{3}$ ， $P(A \cup B)=\frac{3}{4}$ ，試依據下列條件求解

$P(B)$ ：

- (1) A 與 B 是互斥事件，則 $P(B)=$ _____。
- (2) A 與 B 是獨立事件，則 $P(B)=$ _____。

解 (1) A 與 B 是互斥事件，則 $A \cap B = \emptyset$ ，故 $P(A \cap B)=0$

$$\text{由 } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \text{ 得 } \frac{3}{4} = \frac{2}{3} + P(B) - 0 \Rightarrow P(B) = \frac{1}{12}$$

(2) A 與 B 是獨立事件，則 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

$$\text{由 } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \text{ 得 } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

$$\text{故 } \frac{3}{4} = \frac{2}{3} + P(B) - \frac{2}{3}P(B), \text{ 即 } \frac{1}{3}P(B) = \frac{1}{12} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{4}$$

四、計算題（每題 10 分，共 20 分）

11. 袋中有 1 白球 2 黑球，自袋中任取一球，甲、乙看過之後都說是白球。根據經驗，甲說實話的機率是 $\frac{7}{8}$ ，乙說實話的機率為 $\frac{3}{5}$ ，試求此球確實為白球的機率。

解 甲、乙看過之後都說是白球有兩種情形

取出白球且兩人都說白球，故知兩人都說實話

$$\text{機率為 } \frac{1}{3} \times \frac{7}{8} \times \frac{3}{5} = \frac{21}{120}$$

取出黑球且兩人都說白球，故知兩人都沒說實話

$$\text{機率為 } \frac{2}{3} \times \frac{1}{8} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{120}$$

$$\text{故此球確實為白球的機率為 } \frac{\frac{21}{120}}{\frac{21}{120} + \frac{4}{120}} = \frac{21}{25}$$

取球 是否說實話

白 —— 兩人都說實話
黑 —— 兩人都沒說實話

12. 科學研習社社員的年級與性別分配如下表，如果希望性別與年級獨立，試問應再招收幾名高一女生社員？

	高二	高一
男	15	10
女	12	5

解 假設再招收 x 名高一女生社員可以使性別與年級獨立，作列聯表如下：

	高二	高一	小計
男	15	10	25
女	12	$5 + x$	$17 + x$
小計	27	$15 + x$	$42 + x$

則高一且女生社員的機率等於高一社員機率乘以女生社員的機率

$$\text{故 } \frac{5+x}{42+x} = \frac{15+x}{42+x} \times \frac{17+x}{42+x}, \text{ 解得 } x = 3, \text{ 故應再招收 3 名高一女生社員}$$