第 3 章 矩陣與資料表格

3-1 矩陣的定義與運算

重點整理

一、矩陣的定義

1. 矩陣的定義：

(1) 矩陣：

把一些數字排列成整齊的矩形陣列，稱為矩陣（matrix）。

矩陣的橫排稱為列，直排稱為行，每個位置都稱為元（entry）。

如下矩陣有 m 列 n 行，稱為 $m\times n$ 階矩陣，可以用 $[a_{ij}]_{m\times n}$ 表示，其中 a_{ij} 為第 i 列第 j 行交叉位置的元，稱為矩陣的第 (i,j) 元。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

例：$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 6 & 11 & 1 \\ 12 & 7 & 9 \\ 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$，它有 4 列 3 行，是 4×3 階矩陣。

以 $[a_{ij}]_{4\times 3}$ 表示這個矩陣，即 $A=[a_{ij}]_{4\times 3}$，其中 a_{ij} 代表 A 的元，例如，$a_{23}=1$，$a_{42}=4$。

當 $m=n$ 時（行數等於列數），矩陣又稱為方陣。

例：矩陣 $B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 8 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ 有 3 列 3 行，是 3×3 階矩陣，又稱為 3 階方陣。

(2) 矩陣的相等

若兩相同階數的矩陣 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，$B=[b_{ij}]_{m\times n}$，滿足 A 與 B 每一個相同位置的元都相等，也就是 $a_{ij}=b_{ij}$，$1\le i\le m$，$1\le j\le n$，則稱矩陣 A 和 B 相等，並記為 $A=B$。

例：矩陣 $A=\begin{bmatrix} 2-1 & 3 & 5 \\ 2-3 & 0 & 8 \\ 2\times 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 8 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$，則 $A=B$。

例：矩陣 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$，若 $A=B$，則 $a=4$，$b=2$，$c=3$，$d=1$。

3-1

翰林用心教師用精益求精

2. 零矩陣與單位方陣：

(1) 零矩陣：若 $m\times n$ 階矩陣的每一個元都是 0，稱為零矩陣，記為 $O_{m\times n}$。

例：$O_{2\times 3}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$。

特別地，n 階零方陣可以用 O_n 簡記，如 $O_{2\times 2}=O_2=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$。

(2) 單位方陣：n 階方陣主對角線上的元（a_{11}，a_{22}，a_{33}，……，a_{nn}）都是 1，其他元都是 0，稱為 n 階單位方陣，記為 I_n。

例：$I_1=[1]$，$I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，$I_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$。

二、矩陣的運算

階數相同的矩陣可以做加法或減法運算，只要將相同位置的元相加或相減即可。

1. 矩陣的加法：

設 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，$B=[b_{ij}]_{m\times n}$，則 $A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$。

例：$A=\begin{bmatrix}3&4\\2&5\\1&2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}3&1\\6&0\\2&4\end{bmatrix}$，則 $A+B=\begin{bmatrix}3+3&4+1\\2+6&5+0\\1+2&2+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&5\\8&5\\3&6\end{bmatrix}$。

加法反矩陣：將矩陣 A 的每一個元都乘以 -1，以 $-A$ 表示。

例：$A=\begin{bmatrix}3&4\\2&5\\1&2\end{bmatrix}$，則 $-A=\begin{bmatrix}-3&-4\\-2&-5\\-1&-2\end{bmatrix}$ 稱為 A 的加法反矩陣。

顯然，$A+(-A)=O$。

（任何矩陣 A 與其加法反矩陣 $-A$ 相加，其結果必為零矩陣）

2. 矩陣的減法：

設 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，$B=[b_{ij}]_{m\times n}$，則 $A-B=[a_{ij}-b_{ij}]_{m\times n}$。

例：$A=\begin{bmatrix}3&4\\2&5\\1&2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}3&1\\6&0\\2&4\end{bmatrix}$，則 $A-B=\begin{bmatrix}3-3&4-1\\2-6&5-0\\1-2&2-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&3\\-4&5\\-1&-2\end{bmatrix}$。

3. 矩陣的係數積：

將矩陣 $A+A$ 記為 $2A$，得知 $2A$ 的每一個元都是 A 相同位置元的 2 倍。同理，rA 的每個元都是 A 相同位置元的 r 倍。類似 rA 這種運算，稱為矩陣的係數積。

設 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，r 是實數，則 $rA=[ra_{ij}]_{m\times n}$。

例：$A=\begin{bmatrix}7&2&1\\2&3&5\end{bmatrix}$，則 $3A=\begin{bmatrix}3\times 7&3\times 2&3\times 1\\3\times 2&3\times 3&3\times 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}21&6&3\\6&9&15\end{bmatrix}$，

$-2A=\begin{bmatrix}-14&-4&-2\\-4&-6&-10\end{bmatrix}$。

4. 矩陣的乘法：

設 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，$B=[b_{ij}]_{n\times p}$，則 $C=AB$ 是一個 $m\times p$ 階矩陣，即 $C=[c_{ij}]_{m\times p}$，其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots\cdots+a_{in}b_{nj}$。

注意：矩陣 A 的行數＝矩陣 B 的列數＝n，A、B 才能相乘（也就是 AB 有意義）。

例：$A=\begin{bmatrix}3&1&0\\2&4&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&0\\2&3\\5&1\end{bmatrix}$，

則 $AB=\begin{bmatrix}3\times1+1\times2+0\times5 & 3\times0+1\times3+0\times1\\2\times1+4\times2+1\times5 & 2\times0+4\times3+1\times1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&3\\15&13\end{bmatrix}$。

請注意，A 是 2×3 階矩陣，B 是 3×2 階矩陣，AB 是 2×2 階矩陣。

矩陣乘法注意事項：

(1) AB 有意義，BA 不一定有意義。

例：矩陣 $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$。

因為 A 的行數＝B 的列數＝2，AB 相乘有意義。

即 $AB=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times2+2\times1\\3\times2+4\times1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\10\end{bmatrix}$。

但 B 的行數＝1，A 的列數＝2，兩者不相等，故 BA 無意義。

(2) AB 有意義，BA 有意義，AB 不一定等於 BA。

例：$\begin{bmatrix}1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&4\\1&2\end{bmatrix}$，兩者都有意義，

但 $\begin{bmatrix}4\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}2&4\\1&2\end{bmatrix}$。

(3) $AB=O$ 時，A、B 不一定至少有一個零矩陣（可能 A、B 都不是零矩陣）。

例：$\begin{bmatrix}0&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&3\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$，但 $\begin{bmatrix}0&2\\0&1\end{bmatrix}\neq O$，$\begin{bmatrix}-1&3\\0&0\end{bmatrix}\neq O$。

(4) $AB=AC$ 時，不一定 $B=C$。

例：$\begin{bmatrix}0&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&3\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&1\\0&0\end{bmatrix}$，但 $\begin{bmatrix}-1&3\\0&0\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}4&1\\0&0\end{bmatrix}$。

矩陣乘法的性質：

假設以下的矩陣乘法都有意義，矩陣乘法具有下列性質：

(1) $(AB)C=A(BC)$。

(2) $A(B+C)=AB+AC$。

(3) $(A+B)C=AC+BC$。

(4) $r(AB)=(rA)B=A(rB)$，其中 r 為實數。

例題 1　資料表的製作與應用

開會時，學務主任報告：「根據調查，學生上學情形如下。10 年級學生步行 68 人、騎腳踏車 11 人、搭乘公車 79 人、其他方式 22 人，11 年級學生步行 60 人、騎腳踏車 15 人、搭乘公車 76 人、其他方式 31 人，12 年級學生步行 58 人、騎腳踏車 21 人、搭乘公車 70 人、其他方式 39 人。」請將這些訊息以資料表呈現，並統計各年級人數、各種上學方式的人數，以及三個年級總人數。（10 分）

解

年級	步行	騎腳踏車	搭乘公車	其他	小計
10	68	11	79	22	180
11	60	15	76	31	182
12	58	21	70	39	188
小計	186	47	225	92	550

例題 2　矩陣基本概念

已知矩陣 $A=\begin{bmatrix}2&3&1\\4&7&5\\8&6&9\end{bmatrix}$，試寫出：

(1) 矩陣 A 的階數。（4 分）

(2) A 的第（2，3）元。（4 分）

(3) 6 在第幾列，第幾行？（4 分）

解 (1) 矩陣 A 為 3×3 階矩陣

(2) A 的第（2，3）元為 5

(3) 6 在第 3 列，第 2 行

例題 3　矩陣的相等

已知矩陣 $A=\begin{bmatrix}3&a&4\\b&2&c\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}s&6&t\\5&u&1\end{bmatrix}$，已知 $A=B$，試求 a、b、c、s、t、u。（10 分）

解 因為 $A=B$，所以對應位置的元都相等

故得 $a=6$，$b=5$，$c=1$，$s=3$，$t=4$，$u=2$

例題 4　矩陣的加減法

已知 $A=\begin{bmatrix}4 & -2 & 3\\ 0 & 2 & -1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 1\\ 3 & -1 & 0\end{bmatrix}$，試求：

(1) $A+B$。（4 分）

(2) 矩陣 C，使得 $A+C=O$（零矩陣）。（4 分）

解

(1) $A+B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 4\\ 3 & 1 & -1\end{bmatrix}$

(2) $A+C=O$，則 $C=-A=\begin{bmatrix}-4 & 2 & -3\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix}$

例題 5　矩陣的係數積

矩陣 $A=\begin{bmatrix}5 & -3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}-2 & -6\\ 3 & 5\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -3 & 3\end{bmatrix}$，試求：

(1) $2A-B$。（4 分）

(2) $3A+2B-C$。（4 分）

解

(1) $2A-B=\begin{bmatrix}10 & -6\\ 2 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2 & -6\\ 3 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12 & 0\\ -1 & -1\end{bmatrix}$

(2) $3A+2B-C=\begin{bmatrix}15 & -9\\ 3 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4 & -12\\ 6 & 10\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 1\\ -3 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & -22\\ 12 & 13\end{bmatrix}$

例題 6　矩陣方程式

已知矩陣 $A=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}3 & 4\\ -3 & 3\end{bmatrix}$，且 $2X+A=3B$，試求：

(1) $3B$。（4 分）

(2) 矩陣 X。（4 分）

解

(1) $3B=\begin{bmatrix}9 & 12\\ -9 & 9\end{bmatrix}$

(2) $2X+A=3B$，移項得 $2X=3B-A=\begin{bmatrix}9 & 12\\ -9 & 9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 10\\ -12 & 10\end{bmatrix}$

故得 $X=\begin{bmatrix}2 & 5\\ -6 & 5\end{bmatrix}$

例題 7　矩陣的乘法

已知矩陣 $A=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 2\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & 2\end{bmatrix}$，試求：

(1) AB。（4 分）

(2) AC。（4 分）

解

(1) $AB=\begin{bmatrix}4\times1+2\times(-1) & 4\times2+2\times3 & 4\times1+2\times2\\ 1\times1+3\times(-1) & 1\times2+3\times3 & 1\times1+3\times2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 14 & 8\\ -2 & 11 & 7\end{bmatrix}$

(2) $AC=\begin{bmatrix}4\times1+2\times(-2) & 4\times3+2\times2\\ 1\times1+3\times(-2) & 1\times3+3\times2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 16\\ -5 & 9\end{bmatrix}$

例題 8　以算式定義矩陣的元

已知矩陣 $A=[a_{ij}]_{2\times 3}$，其中 $a_{ij}=2i+3j$，試求矩陣 A。（10 分）

解 $A=[a_{ij}]_{2\times 3}$ 是一個 2 列 3 行的矩陣，有 6 個元

其中第 i 列，第 j 行的元（a_{ij}）定義為 $a_{ij}=2i+3j$

所以 $a_{11}=2\times 1+3\times 1=5$，$a_{12}=2\times 1+3\times 2=8$，$a_{13}=2\times 1+3\times 3=11$

$a_{21}=2\times 2+3\times 1=7$，$a_{22}=2\times 2+3\times 2=10$，$a_{23}=2\times 2+3\times 3=13$

故得 $A=\begin{bmatrix}5 & 8 & 11\\ 7 & 10 & 13\end{bmatrix}$

例題 9　矩陣的加減法與平方

已知二階方陣 A、B，$A+B=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}$，$A-B=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 3 & 3\end{bmatrix}$，試求 A^2-B^2。（10 分）

解

$A=\frac{1}{2}[(A+B)+(A-B)]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 4\\ 6 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$

$B=(A+B)-A=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

故 $A^2-B^2=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 10\\ 15 & 22\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 10\\ 15 & 21\end{bmatrix}$

例題 10　矩陣乘法與係數積的應用

某超商出售三種容量的咖啡，售價分別是大杯 45 元、中杯 35 元、小杯 25 元，已知週一售出大杯 22 杯、中杯 40 杯、小杯 10 杯，週二售出大杯 30 杯、中杯 20 杯、小杯 20 杯，週三售出大杯 30 杯、中杯 22 杯、小杯 10 杯。

(1) 試以 1×3 階矩陣 A 表示大杯、中杯、小杯的售價。（4 分）

(2) 試以 3×3 階矩陣 X 表示週一、週二、週三售出大杯、中杯、小杯的數量。第一行為週一的數量，第一、二、三列分別是大、中、小杯的數量。（4 分）

(3) 利用矩陣乘法 AX 計算週一、週二、週三的咖啡銷售金額。（4 分）

(4) 假設咖啡的獲利率是售價的 40 %，試計算這三天的獲利分別是多少元。（4 分）

解 (1) $A=[45\quad 35\quad 25]$

(2) $X=\begin{bmatrix}22 & 30 & 30\\ 40 & 20 & 22\\ 10 & 20 & 10\end{bmatrix}$

(3) $AX=[45\quad 35\quad 25]\begin{bmatrix}22 & 30 & 30\\ 40 & 20 & 22\\ 10 & 20 & 10\end{bmatrix}=[2640\quad 2550\quad 2370]$

這三天銷售金額分別是 2640 元，2550 元，2370 元

(4) $0.4[2640\quad 2550\quad 2370]=[1056\quad 1020\quad 948]$

這三天的獲利分別是 1056 元，1020 元，948 元