



3-1 條件機率與獨立事件

重點整理

一、機率的性質

設 S 是某一試驗的樣本空間， A 是樣本空間 S 的任一事件。

1. 對於任意事件 A ，其發生的機率必定大於或等於 0，小於或等於 1。

說明： $P(A) \geq 0$ ， $P(A) \leq 1$ ，即 $0 \leq P(A) \leq 1$ 。

2. 必然事件發生的機率等於 1；不可能事件發生的機率等於 0。

說明： S 的必然事件就是 S ，必然發生，所以 $P(S) = 1$ 。不可能事件就是 $\emptyset$ ，不含樣本點，所以 $P(\emptyset) = 0$ 。

3. 若事件 A 與事件 B 互斥（即不可能同時發生），則 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ 。

說明： A 、 B 互斥即 $A \cap B = \emptyset$ ， $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$ ，所以

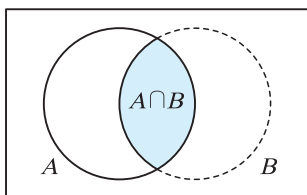
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B)。$$

4. 若事件 A' 為事件 A 的餘事件，則 $P(A') = 1 - P(A)$ 。

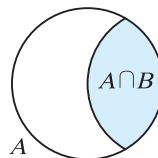
說明：因為 $P(A) + P(A') = 1$ ，所以 $P(A') = 1 - P(A)$ 。

二、條件機率

如下圖，在事件 A 發生的條件（condition）下，討論事件 B 發生的機率，相當於把 A 看成樣本空間，討論事件 $A \cap B$ 的機率。也就是說，樣本空間變小了。



相當於把 A 看成樣本空間



1. 條件機率：

設 A ， B 為樣本空間 S 中的兩事件，且 $P(A) > 0$ 。則在事件 A 發生的條件下，事

件 B 發生的條件機率為 $P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ 。

例：擲一顆公正骰子，已知擲出點數大於 1，試求擲出奇數點的機率。

解：設擲出點數大於 1 的事件為 $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ ，

擲出奇數點的事件為 $B = \{1, 3, 5\}$ ，

因為 $A \cap B = \{3, 5\}$ ，故所求機率為 $P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{2}{5}$ 。



2. 列聯表：

把資料依照屬性的變項填入表格把資訊用一張表來呈現，這張表稱為列聯表（contingency table）。

例：班上有男生 20 人、女生 16 人，某日調查上學方式，發現男生有 5 人步行上學，女生有 3 人步行上學。已知沒有步行的同學都是乘車上學，則以列聯表呈現資料如下左表：

	步行	乘車	合計
男生	5		20
女生	3		16
合計			

推算如右表

	步行	乘車	合計
男生	5	15	20
女生	3	13	16
合計	8	28	36

故知全班 36 人當中，有 8 人步行上學，28 人乘車上學。

三、獨立事件

1. 獨立事件：

如果事件 A 發生與否，不影響另一事件 B 的機率，我們就說 A 、 B 是獨立事件，

也就是 $P(B|A) = P(B)$ ，由條件機率的定義知 $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ ，所以

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B)，移項得 P(A \cap B) = P(A)P(B)。$$

2. 兩事件為獨立事件：

(1) 設 A 、 B 為樣本空間 S 中的兩事件，若 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ ，則稱 A 、 B 為獨立事件。

例：擲一顆公正骰子一次，令 A 表示擲出奇數點的事件， B 表示擲出 1 點或 2 點的事件， C 表示擲出偶數點的事件， D 表示擲出 1 點或 3 點的事

件。因為 $P(A) = \frac{1}{2}$ ， $P(B) = \frac{1}{3}$ ， $P(C) = \frac{1}{2}$ ， $P(D) = \frac{1}{3}$ ，

$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ ， $P(A \cap C) = 0$ ， $P(A \cap D) = \frac{1}{3}$ 。顯然，

$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ ，且 $P(A)P(B) = \frac{1}{6}$ ，所以 A 、 B 是獨立事件。

$P(A \cap C) = 0$ ，但 $P(A)P(C) = \frac{1}{4}$ ，所以 A 、 C 不是獨立事件。

$P(A \cap D) = \frac{1}{3}$ ，但 $P(A)P(D) = \frac{1}{6}$ ，所以 A 、 D 不是獨立事件。

(2) 若 A 、 B 為獨立事件，則 A' 、 B 為獨立事件， A 、 B' 為獨立事件， A' 、 B' 為獨立事件。



3-1

翰林用心
教師用
精益求精

● 例題 1 機率性質的應用(一)

小倫騎著腳踏車在鄉間小路閒逛，在每個十字路口必須決定直行、向右轉或向左轉。已知他向右轉的機率是 0.3，向左轉的機率是 0.2，試求：

- (1) 他決定轉彎的機率。(3 分)
- (2) 他決定直行的機率。(3 分)
- (3) 他決定下車的機率。(4 分)

解 令 A 、 B 、 C 代表直行、向右轉、向左轉這三個事件

顯然，樣本空間由 A 、 B 、 C 這三個事件構成，而且它們彼此互斥

(1) 轉彎的機率： $P(B \cup C) = P(B) + P(C) = 0.3 + 0.2 = 0.5$

(2) 直行的機率： $P(A) = 1 - P(B \cup C) = 1 - 0.5 = 0.5$

(3) 下車的機率：此為不可能事件 $\emptyset$ $\therefore P(\emptyset) = 0$

● 例題 2 機率性質的應用(二)

擲一顆公正的骰子，試求：

- (1) 出現 7 點的機率。(5 分)
- (2) 出現點數大於 0 小於 7 的機率。(5 分)

解 樣本空間 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(1) 出現 7 點的事件為 $\emptyset$ ，是不可能事件，機率為 0

(2) 出現點數大於 0 小於 7 的事件為 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ，是必然事件，機率為 1



● 例題 3 機率性質的應用(三)

粗心的水果行店員不小心將 3 個售價 30 元的蘋果與 9 個售價 20 元的蘋果放在一起，並以 20 元的價格出售。試問：

- (1) 任意選一個，選到原價 30 元蘋果的機率是多少？(5 分)
- (2) 小偉從 12 個蘋果中隨意買了 4 個，試求他至少買到一個原價 30 元蘋果的機率。(5 分)

解

(1) 所求機率為 $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

(2) 樣本空間 S 有 C_4^{12} 個元素，即 $n(S) = C_4^{12}$

令 A 為小偉所買都沒有原價 30 元的蘋果的事件， $n(A) = C_4^9$ ，得 $P(A) = \frac{C_4^9}{C_4^{12}} = \frac{14}{55}$

至少買到一個原價 30 元蘋果的事件為 A' ，故所求為 $P(A') = 1 - \frac{14}{55} = \frac{41}{55}$



3-1

● 例題 4 機率的性質

(1) 已知 $P(A) = \frac{2}{3}$ ， $P(B) = \frac{1}{2}$ ， $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ ，試求：

① $P(A \cup B)$ 。(2 分)

② $P(A' \cap B')$ 。(2 分)

(2) 已知 $P(C) = \frac{1}{3}$ ， $P(D) = \frac{1}{2}$ ， $C \cap D = \emptyset$ ，試求：

① $P(C \cap D)$ 。(3 分)

② $P(C \cup D)$ 。(3 分)

解

(1) ① $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{11}{12}$

② $P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{11}{12} = \frac{1}{12}$

(2) ① 因為 $C \cap D = \emptyset$ ，所以 $P(C \cap D) = 0$

② $P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 0 = \frac{5}{6}$

●例題 5 條件機率

檢視段考成績，全班有 20 人數學及格，有 28 人英文及格，有 16 人數學與英文都及格。現在任意抽選一位同學，試問：

- (1) 若這位同學數學及格，則他英文及格的機率是多少？(5 分)
- (2) 若這位同學英文及格，則他數學及格的機率是多少？(5 分)

解 設 A 、 B 分別代表數學、英文及格的事件，則 $n(A)=20$ ， $n(B)=28$ ， $n(A \cap B)=16$

$$(1) \text{ 所求機率為 } P(B|A) = \frac{n(B \cap A)}{n(A)} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

$$(2) \text{ 所求機率為 } P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{16}{28} = \frac{4}{7}$$

●例題 6 列聯表在條件機率的應用

同學會聚餐，每人各點一杯飲料。餐廳所提供的飲料只有紅茶或咖啡兩種，並有大杯或小杯可以選擇。已知紅茶合計點 17 杯，其中有 9 杯是小杯；咖啡則是大杯 12 杯、小杯 6 杯。請利用列聯表回答下列問題：

- (1) 小雯點了小杯飲料，試求她點紅茶的機率。(5 分)
- (2) 小輝點了咖啡，試問他點大杯的機率。(5 分)

解

	大	小	合計
紅茶	8	9	17
咖啡	12	6	18
合計	20	15	35

依題意完成列聯表如上

$$(1) \text{ 所求機率為 } P(\text{紅茶} | \text{小杯}) = \frac{n(\text{小杯紅茶})}{n(\text{小杯})} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

$$(2) \text{ 所求機率為 } P(\text{大杯} | \text{咖啡}) = \frac{n(\text{大杯咖啡})}{n(\text{咖啡})} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

● 例題 7 檢驗兩事件是否獨立

擲一顆公正骰子一次，令事件 $A=\{1, 2, 3, 4\}$ ， $B=\{1, 3, 5\}$ ， $C=\{3, 4, 5, 6\}$ ，試問：

(1) A 與 B 是否為獨立事件？(5 分)

(2) A 與 C 是否為獨立事件？(5 分)

解 $P(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ ， $P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ ， $P(C)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

(1) $A \cap B = \{1, 3\}$ ，得 $P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ，

且 $P(A)P(B) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ ，得 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ ，故 A 與 B 是獨立事件

(2) $A \cap C = \{3, 4\}$ ，得 $P(A \cap C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ，

但 $P(A)P(C) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ ，即 $P(A \cap C) \neq P(A)P(C)$ ，故 A 與 C 不是獨立事件

● 例題 8 獨立事件公式的應用

甲、乙兩人一起打靶，已知命中率分別為 $\frac{2}{3}$ 、 $\frac{3}{4}$ ，且兩人命中靶面的事件為獨立事件。今兩人各射擊 1 發，試求：

(1) 兩人都命中的機率。(5 分)

(2) 靶面至少中 1 發的機率。(5 分)

解 設 A 、 B 分別為甲、乙命中靶面的事件， $P(A)=\frac{2}{3}$ ， $P(B)=\frac{3}{4}$

(1) $\because A$ 、 B 為獨立事件，故所求為 $P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$

(2) 所求為 $1 -$ 兩人都沒命中的機率，即 $1 - P(A' \cap B')$

$\because A$ 、 B 為獨立事件 $\therefore A'$ 、 B' 也是獨立事件，可得 $P(A' \cap B') = P(A')P(B')$

故所求機率為 $1 - P(A' \cap B') = 1 - P(A')P(B') = 1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{11}{12}$



3-1

翰林用心
教師用
精益求精

●例題 9 獨立事件與列聯表的應用

甲、乙兩所國中學生申請入學當地一所高中，預定錄取 468 名。已知報名人數為甲校 400 人，乙校 432 人。試問，當表中 a, b, c, d 分別為多少時，我們可以說是否錄取與就讀學校是獨立的？（10 分）

	錄取	未錄取
甲校	a	b
乙校	c	d

解 設甲校錄取 x 人，依題意作列聯表如下：

	錄取	未錄取	合計
甲校	x	$400 - x$	400
乙校	$468 - x$	$x - 36$	432
合計	468	364	832

依題意，甲校學生且錄取的機率 = 甲校學生的機率 $\times$ 錄取的機率

$$\text{即 } \frac{x}{832} = \frac{400}{832} \times \frac{468}{832}, \text{ 解得 } x = 225$$

$$\text{故得 } a = 225, b = 175, c = 243, d = 189$$

●例題 10 獨立事件公式的計算

(1) 假設 A, B 為獨立事件，且 $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{3}{4}$ ，試求：

① $P(A \cap B')$ 。(2 分)

② $P(A' \cap B')$ 。(2 分)

(2) 已知 C, D 是獨立事件，且 $P(C) = \frac{1}{2}, P(C \cup D) = \frac{3}{4}$ ，試求：

① $P(D)$ 。(3 分)

② $P(D|C)$ 。(3 分)

解 (1) ① A, B 為獨立事件，則 A, B' 也是獨立事件

$$\text{故 } P(A \cap B') = P(A)P(B') = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

② A, B 為獨立事件，則 A', B' 也是獨立事件

$$\text{故 } P(A' \cap B') = P(A')P(B') = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$$

(2) ① C, D 是獨立事件，故 $P(C \cap D) = P(C)P(D)$

$$\therefore P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D)$$

$$\therefore \frac{3}{4} = \frac{1}{2} + P(D) - \frac{1}{2}P(D) \Rightarrow \frac{1}{2}P(D) = \frac{1}{4}, \text{ 故得 } P(D) = \frac{1}{2}$$

② C, D 是獨立事件， D 發生的機率與 C 是否發生無關

$$\text{故 } P(D|C) = P(D) = \frac{1}{2}$$

〈另解〉

$$P(D|C) = \frac{P(D \cap C)}{P(C)} = \frac{P(D)P(C)}{P(C)} = P(D) = \frac{1}{2}$$

