

2-2 貝氏定理

重點整理

一、條件機率的乘法法則

假設 A, B 是同一樣本空間 S 中的兩事件，且 $P(A) > 0$ ，則

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)。$$

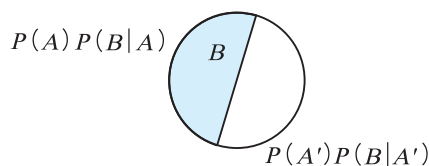
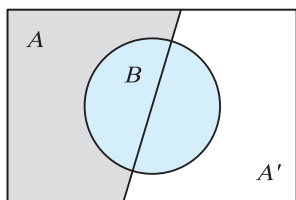
例：袋中有 4 顆白球、2 顆紅球，假設每顆球被選取的機會均等，今從袋中取球，每次取 1 球，取後不放回，連取兩次，試求第一次取到白球且第二次取到紅球的機率。

解：顯然，第一次取到白球的機率為 $\frac{4}{6}$ ，在第一次取到白球的條件下，第二次取

球時剩 5 個球（3 白 2 紅），取到紅球的機率為 $\frac{2}{5}$ ，所以，第一次取到白球且

第二次取到紅球的機率為 $\frac{4}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$ 。

二、貝氏定理



令 A, B 為事件，若已知 $P(A)$ 、 $P(A')$ 、 $P(B|A)$ 、 $P(B|A')$ ，且 $P(A) > 0$ ， $P(A') > 0$ ， $P(B) > 0$ ，則在事件 B 發生的情況下，事件 A 發生的機率為

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(A')P(B|A')}。$$

例：甲、乙兩部機器產量各占全公司的 30 %、70 %，產品不良率分別為 4 %、2 %。今任意抽驗一個產品，得知是不良品，則此產品

是由甲機器生產的機率為 $\frac{0.3 \times 0.04}{0.3 \times 0.04 + 0.7 \times 0.02} = \frac{6}{13}$ ，

是由乙機器生產的機率為 $\frac{0.7 \times 0.02}{0.3 \times 0.04 + 0.7 \times 0.02} = \frac{7}{13}$ 。

三、主觀機率與客觀機率

機率應符合生活經驗，但不能違背機率的性質。

1. 客觀機率：

將多筆資料經過觀察、記錄、調查與試驗，所獲得的事件發生頻率（相對次數）當作事件發生的機率，也稱為頻率機率。

例：擲一顆公正的骰子 100 次，偶數點出現 32 次，我們可以認為這顆骰子出現

偶數點的機率是 $\frac{32}{100}$ ，也就是 0.32。

2. 主觀機率：根據個人經驗，對事件可能發生的程度所做的機率猜測。

例：我覺得我這學期各科及格的機率有八成。



2-2

翰林用心
教師用
精益求精

● 例題 1 條件機率的乘法法則(一)

袋中有 4 白球，3 黑球，甲、乙兩人依序各取出一球，取後不放回，試求：

- (1) 甲、乙都取到白球的機率。(5 分)
- (2) 乙取到白球的機率。(5 分)

解 設 A 、 B 分別代表甲、乙取到白球的事件

$$(1) \text{ 所求機率為 } P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$$

$$(2) \text{ 所求機率為 } P(B) = P(A \cap B) + P(A' \cap B) = P(A)P(B|A) + P(A')P(B|A') \\ = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} + \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{24}{42} = \frac{4}{7}$$

● 例題 2 條件機率的乘法法則(二)

籤筒內有 16 支籤，其中 6 支標示有獎，且每支籤被抽中的機會均等。今甲、乙兩人依序抽籤，每人抽一支且抽完不放回，試求：

- (1) 甲、乙兩人都未中獎的機率。(5 分)
- (2) 只有甲中獎的機率。(5 分)

解 設 A 、 B 分別代表甲、乙中獎的事件

(1) 兩人都未中獎的機率為

$$P(A' \cap B') = P(A')P(B'|A') = \frac{10}{16} \times \frac{9}{15} = \frac{3}{8}$$

(2) 只有甲中獎的機率為

$$P(A \cap B') = P(A)P(B'|A) = \frac{6}{16} \times \frac{10}{15} = \frac{1}{4}$$



● 例題 3 條件機率乘法法則的推廣

冰箱裡有 10 杯大小相同的飲料，使用膠膜封口，只知道其中 3 杯是咖啡，其餘都是紅茶。若每杯被取出的機會均等，今甲、乙、丙三人依序各取一杯，取出後立即飲用，試求：

- (1) 甲取出咖啡的機率。(5 分)
- (2) 甲、乙、丙三人都取出咖啡的機率。(5 分)

解 設 A 、 B 、 C 分別代表甲、乙、丙取出咖啡的事件

$$(1) P(A) = \frac{3}{10}$$

$$(2) P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B|A)P(C|A \cap B) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{120}$$



● 例題 4 貝氏定理(一)

某公司產品來自甲、乙兩部機器，產量各占總量的 60 %、40 %，而產品的不合格率則分別為 2 %、1 %。今從倉庫任選一個產品測試，試求：

- (1) 此產品不合格的機率。(5 分)
- (2) 此不合格產品由甲機器製造的機率。(5 分)

解 將百分比化為小數計算，

$$(1) \text{ 由條件機率的乘法法則，所求機率為 } 0.6 \times 0.02 + 0.4 \times 0.01 = 0.016$$

$$(2) \text{ 由貝氏定理，所求機率為 } \frac{0.6 \times 0.02}{0.6 \times 0.02 + 0.4 \times 0.01} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

● 例題 5 貝氏定理(二)

生技公司開發一種檢測方法，用來判斷是否感染某種病毒。已知真正感染病毒的人，檢出結果為陽性的比率為 0.85；未感染而檢出陽性（誤判感染）的比率則為 0.1。假設某社區有 20 % 的人已感染此病毒，今任選一人加以檢測，試求：

- (1) 此人的檢驗結果為陽性的機率。（5 分）
- (2) 承(1)，此人確實已感染病毒的機率。（5 分）

解 (1) 由條件機率的乘法法則知檢出陽性的機率為 $0.2 \times 0.85 + 0.8 \times 0.1 = 0.17 + 0.08 = 0.25$

(2) 由貝氏定理知此人確實感染的機率為 $\frac{0.17}{0.17 + 0.08} = \frac{17}{25}$

● 例題 6 貝氏定理(三)

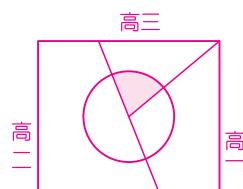
校刊社的社員中，高一占 30 %，高二占 50 %，高三占 20 %。已知高一社員的 20 % 是男生，高二社員的 12 % 是男生，高三社員的 10 % 是男生。試問：

- (1) 任抽一名社員，此社員是男生的機率。（5 分）
- (2) 已知小偉（男生）是校刊社社員，他是高三學生的機率。（5 分）

解 (1) 由條件機率的乘法法則知所求為

$$\begin{aligned} & 30 \% \times 20 \% + 50 \% \times 12 \% + 20 \% \times 10 \% \\ &= \frac{600}{10000} + \frac{600}{10000} + \frac{200}{10000} = 0.06 + 0.06 + 0.02 \\ &= 0.14 \end{aligned}$$

(2) 由貝氏定理可得 $\frac{0.02}{0.06 + 0.06 + 0.02} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$

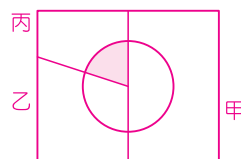


●例題 7 貝氏定理(四)

某公司產品來自甲、乙、丙三部機器，三部機器的產量各占總量的 50 %、30 %、20 %，而產品的不合格率則分別為 2 %、2 %、1 %。今從倉庫任選一個產品測試，已知為不合格產品，試求此產品由丙機器製造的機率。(10 分)

解 將百分比化為小數計算，由貝氏定理可得

$$\frac{0.2 \times 0.01}{0.5 \times 0.02 + 0.3 \times 0.02 + 0.2 \times 0.01} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$$



●例題 8 貝氏定理(五)

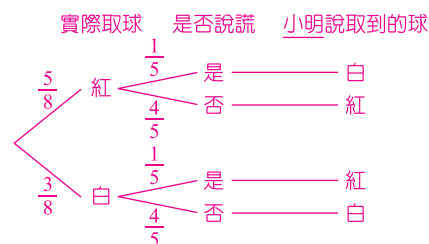
袋中有 5 紅球、3 白球，小明隨機取出一球，並且說他取到紅球。根據過去的經驗，小明說謊的機率為 $\frac{1}{5}$ ，試求小明確實取到紅球的機率。(10 分)

解 小明說他取到紅球有兩種情形：

取到紅球且說他取到紅球，機率為 $\frac{5}{8} \times \frac{4}{5} = \frac{20}{40}$

取到白球但說他取到紅球（說謊），機率為 $\frac{3}{8} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{40}$

故由貝氏定理可知小明確實取到紅球的機率為 $\frac{\frac{20}{40}}{\frac{20}{40} + \frac{3}{40}} = \frac{20}{23}$



● 例題 9 主觀機率與客觀機率

請分別說明下列有關機率的敘述，哪些是主觀機率？哪些是客觀機率？

- (1) 小華說他這次段考各科全部及格的機率是 90 %。
 - (2) 工廠品管部門抽驗產品 500 個，發現不良品有 10 個，因此不良的比率是 2 %。
 - (3) 爸爸上班前告訴媽媽，今天回家吃晚餐的機率是 90 %。
 - (4) 爺爺看著天上的晚霞，說道：「這幾天颱風來襲的機率超過 80 %。」
 - (5) 小雯擲一枚硬幣 100 次，正面出現 43 次，所以小雯說這枚硬幣出現正面的機率是 0.43。
- (每小題 2 分)

解 (1) 主觀機率：小華自己評估這一次段考各科的準備情形所做的判斷
(2) 客觀機率：品管部門根據實際抽驗的結果所做的評估
(3) 主觀機率：爸爸根據自己多年的經驗所判斷的結果
(4) 主觀機率：爺爺根據自己多年的觀察所做的判斷
(5) 客觀機率：根據實際投擲骰子所做的判斷
∴ (1)(3)(4) 是主觀機率，(2)(5) 是客觀機率

● 例題 10 客觀機率

擲大、中、小共 3 枚硬幣 200 次，觀察各硬幣出現的正、反面情形，依大、中、小順序記錄如下表。若不計較硬幣的大小，試求下列兩種情形的客觀機率：

	正正正	正正反	正反正	正反反	反正正	反正反	反反正	反反反
次數	28	26	26	25	29	23	22	21

- (1) 出現 2 正面 1 反面的機率。(5 分)
- (2) 最多一個正面的機率。(5 分)

解 (1) 出現 2 正面 1 反面，機率為 $\frac{26 + 26 + 29}{200} = \frac{81}{200} = 0.405$
(2) 最多一個正面，機率為 $\frac{25 + 23 + 22 + 21}{200} = \frac{91}{200} = 0.455$