



第2章

圓錐曲線的認識與應用

重點整理

一、生活中的圓錐曲線

圓錐曲線：包括拋物線、橢圓、雙曲線這三種。

1. 拋物線 (parabola)：

例：二次函數 $y=f(x)=ax^2+bx+c$ ， $a \neq 0$ 的圖形。

打籃球或棒球時，將球丟擲出去的軌跡。

2. 橢圓 (ellipse)：

例：地球繞太陽公轉的軌跡，斜切熱狗的截面。

3. 雙曲線 (hyperbola)：

例：德基水庫的大壩、核電廠冷卻塔的側面曲線為雙曲線的一支。

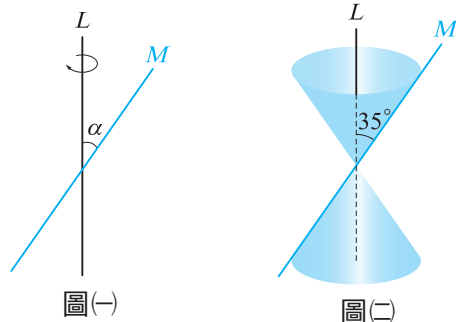
二、圓錐截痕

將平面 E 以不同方式切割直圓錐面 Ω ，所得到的截痕，就是不同的圓錐曲線。

1. 直圓錐面：

如圖(一)，固定直線 L ，將直線 M 繞 L 旋轉一周，則 M 旋轉所掃出來的曲面稱為直圓錐面。圖(一)中 L 與 M 夾角為 α ，我們稱 2α 為直圓錐面的頂角。

例：圖(二)中的直圓錐面頂角為 70° 。

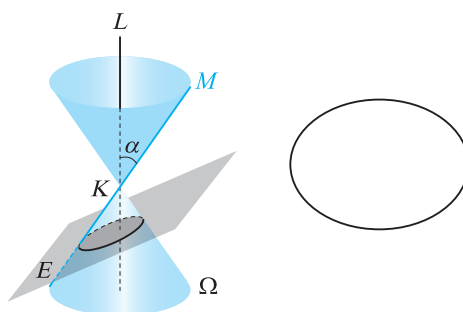
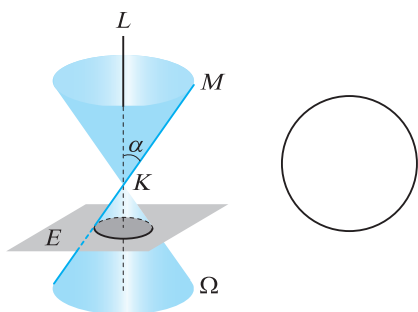


2. 圓錐曲線：

設平面 E 不過直圓錐面 Ω 的頂點 K ， E 與直圓錐面所得到的截痕有以下四種：

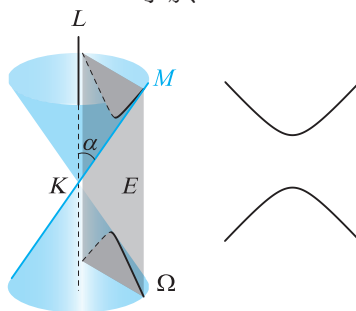
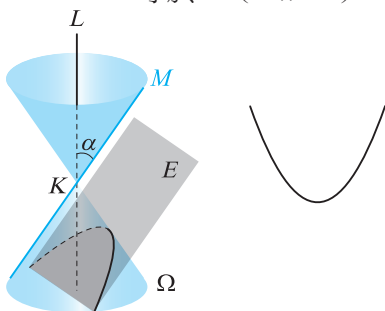
(1) 圓：當平面 E 與直線 L 垂直。

(2) 橢圓：當平面 E 與直線 L 的夾角大於 α 。



(3) 拋物線：當平面 E 與直線 L 的夾角等於 α ($E \parallel M$)。

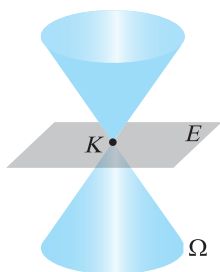
(4) 雙曲線：當平面 E 與直線 L 的夾角小於 α 。



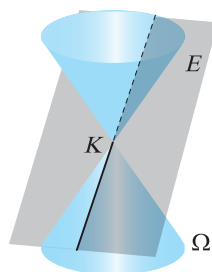
3. 退化的圓錐曲線：

當平面 E 通過直圓錐面 Ω 的頂點 K ，所得到的截痕，分別為點、一直線或相交於一點的兩直線。

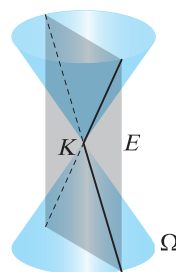
(1) 一點：



(2) 一直線：



(3) 相交於一點的兩直線：

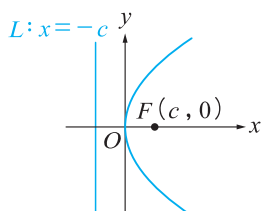


三、圓錐曲線的標準式

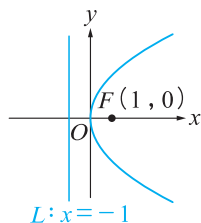
1. 拋物線的標準式：

(1) $y^2 = 4cx$ ：

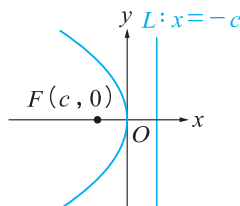
① 當 $c > 0$ ，開口向右。



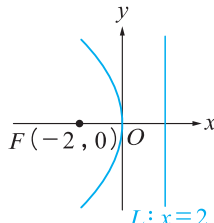
例：① $y^2 = 4x$ 。



② 當 $c < 0$ ，開口向左。

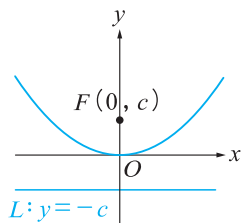


② $y^2 = -8x$ 。

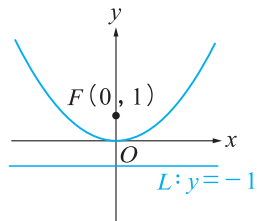


(2) $x^2 = 4cy$ ：

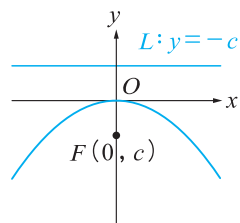
① 當 $c > 0$ ，開口向上。



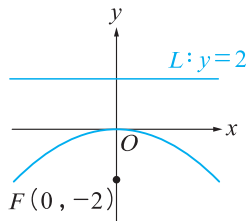
例：① $x^2 = 4y$ 。



② 當 $c < 0$ ，開口向下。



② $x^2 = -8y$ 。





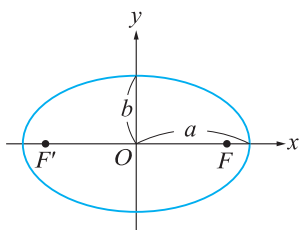
2

翰林用心
教師用
精益求精

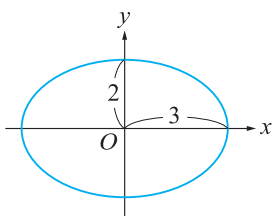
2. 橢圓的標準式：

(1) 長軸在 x 軸上，

標準式為 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 。

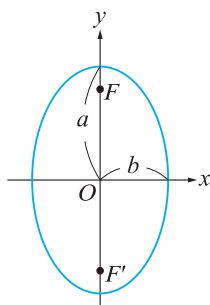


例： $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 。

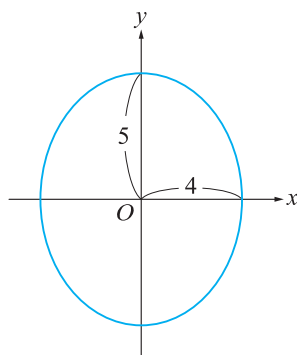


(2) 長軸在 y 軸上，

標準式為 $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ 。



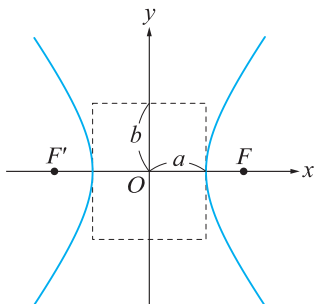
例： $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ 。



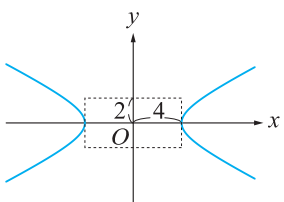
3. 雙曲線的標準式：

(1) 實軸在 x 軸上，

標準式為 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 。

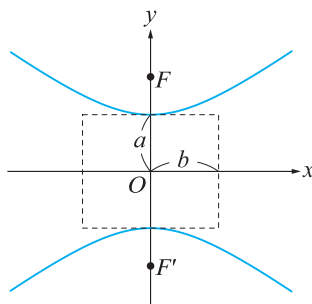


例： $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$ 。

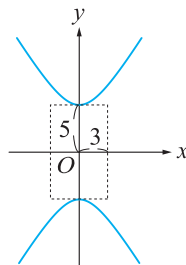


(2) 實軸在 y 軸上，

標準式為 $-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ 。



例： $-\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ 。



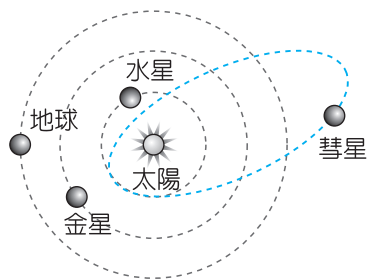
說明：上面各圖形中的 F 與 F' 點稱為焦點。

四、圓錐曲線的應用

1. 天體運行的軌跡：

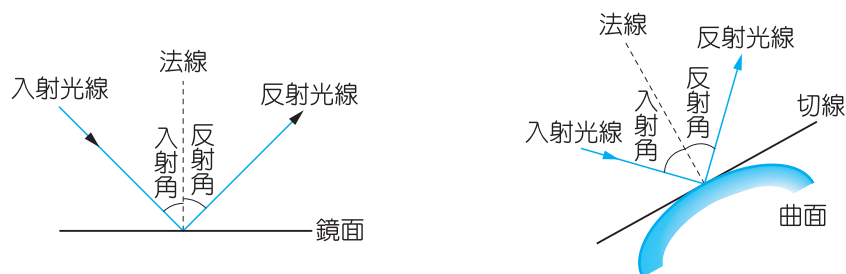
牛頓：單一重力源的作用下，天體運行的軌跡必為圓錐曲線且重力源為一焦點。

例：太陽系天體運行示意圖。



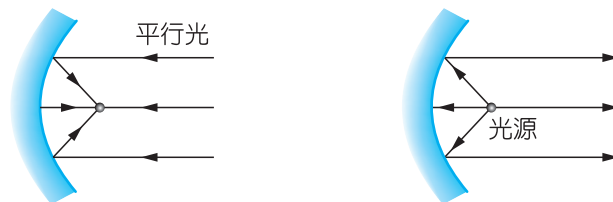
2. 光學性質：

如下圖，光線沿著直線前進，碰到鏡面反射時，入射角等於反射角。



(1) 拋物線的光學性質：

與對稱軸平行的光線經拋物線反射後必通過焦點。反之，由焦點射出的光線經拋物線反射後，必與對稱軸平行。

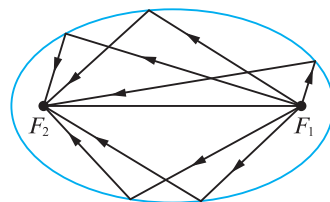


例：天文望遠鏡、探照燈。

(2) 橢圓的光學性質：

由一焦點射出的光線，射到橢圓上任一點經反射後必通過另一焦點。

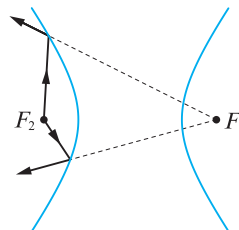
例：體外震波碎石機。



(3) 雙曲線的光學性質：

由一焦點射出的光線，射到雙曲線上任一點經反射後其反射光的反方向延長線必通過另一焦點。

例：具有雙曲面結構的水冷式冷卻塔。



3. 設計的應用：

圓錐曲線的優美形狀適合應用在藝術設計上。

例：圓錐曲線造型燈。

4. 建築的應用：

雙曲拋物面在力學上有穩定的結構，廣泛應用在無梁柱的建築設計中。

例：東海大學路思義教堂。

●例題 1 生活中處處可見圓錐曲線

課本第二章導言敘述底下這一段故事（見翰林高中數學第四冊 B 版課本第 46 頁）：

小如開著有優美商標的 TOYOTA 汽車^(A)經過碧潭大橋^(B)，今天她的目的地是臺中市的東海大學。車子過了大安溪之後，小如想起去年夏天在德基水庫旁，一邊吃著夾有切片小黃瓜及切片香腸的麵包^(C)，喝著圓柱狀玻璃杯內的果汁^(D)，一邊望著德基水庫奇特的大壩造型^(E)。不久後，到了東海大學，道路兩旁裝有自動灑水器^(F)，球場上有許多丟擲籃球的大學生^(G)，路思義教堂^(H)則有不少遊客駐足。小如自備天文望遠鏡^(I)，準備今晚在空曠的校園中，遠眺土星環及木星的衛星^(J)。在警衛提著探照燈^(K)巡視校園的時候，小如準備離開東海大學，今晚她將早早入睡，以備明天到臺中榮民總醫院接受體外震波碎石術^(L)的治療。剛入睡不久，她便夢見哈雷彗星^(M)劃過靜謐的夜空。

你（妳）相信嗎？上面這段話中，幾乎每一句都有圓錐曲線的蹤跡，生活與自然中不想看到它都很難。

請就上文以(A)、(B)、(C)、……等標示的每一句話，複習本章課文，與同學、兄弟姊妹、其他可以與你討論的人討論，或上網、上圖書館查詢資料，指出它們與哪些圓錐曲線有關。（每小題 2 分）

解 (A)橢圓（TOYOTA 汽車商標由三個橢圓構成）

(B)雙曲線（碧潭大橋的拱橋外型是雙曲線的一支）

(C)圓形或橢圓形（小黃瓜及香腸的切片外觀可能是圓形或橢圓形）

(D)圓形或橢圓形（果汁靜置時呈圓形，舉起來要喝時呈橢圓形）

(E)雙曲線（水庫大壩造型是雙曲線的一支）

(F)拋物線（噴出去的的水軌跡是拋物線）；(G)拋物線（丟擲籃球的路徑是拋物線）

(H)雙曲線（教堂外觀是雙曲線）；(I)拋物線（光學天文望遠鏡的原理與拋物線有關）

(J)橢圓（以橢圓形軌道繞太陽公轉）；(K)拋物線（以拋物面鏡將焦點的光照得更遠）

(L)橢圓（震波碎石機利用橢圓的光學性質聚集震波能量）

(M)橢圓（哈雷彗星的公轉軌道是橢圓形）

●例題 2 圓錐截痕

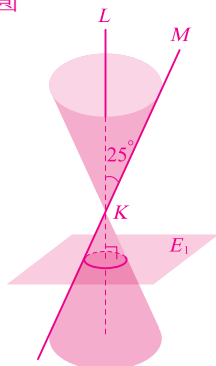
如右圖，直線 M 與直線 L 夾角 25° ，交於 K 點，將直線 M 繞直線 L 形成一個頂點在 K 的直圓錐面。試問，在下列三種條件下，各平面截直圓錐面所得到的圖形（截痕）是什麼？

(1) 平面 E_1 不過 K 點，法向量與直線 L 平行。（4 分）

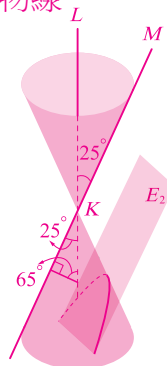
(2) 平面 E_2 不過 K 點，其法向量與直線 L 夾角 65° 。（4 分）

(3) 平面 E_3 不過 K 點，其法向量與直線 L 夾角 85° 。（4 分）

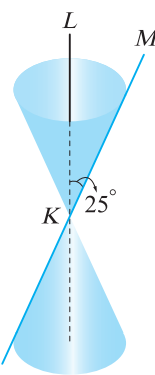
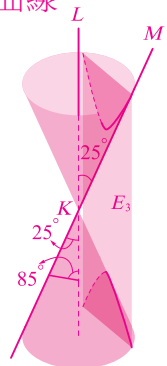
解 (1) 圓



(2) 拋物線

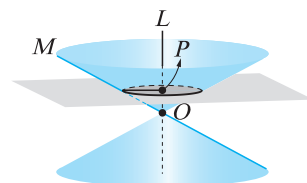


(3) 雙曲線



例題 3 直圓錐面相關問題

如右圖，直線 M 、 L 相交於 O 點， $\overline{OP} = 2$ ，將直線 M 繞 L 旋轉一周，得一直圓錐面。有一平面過直線 L 上頂點 O 外的 P 點且與此直圓錐面的截痕為一圓，其面積為 12π 。試求：



- (1) 截圓的半徑。(4 分)
- (2) 直線 M 與 L 的銳夾角。(4 分)

解 (1) 設截圓半徑為 r

$$\text{由題意， } \pi r^2 = 12\pi$$

$$r^2 = 12, \text{ 故得 } r = 2\sqrt{3}$$

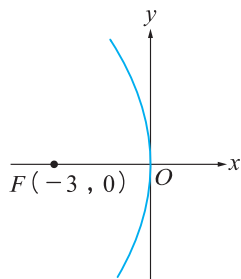
- (2) 設 M 、 L 的銳夾角為 θ

$$\text{則 } \tan \theta = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

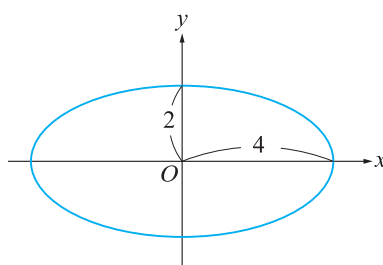
$$\text{故得 } \theta = 60^\circ$$

例題 4 圓錐曲線的圖形與方程式

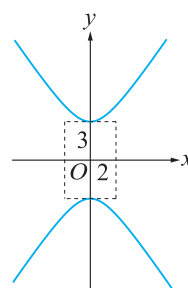
已知圖(一)、圖(二)、圖(三)為三個圓錐曲線方程式(A)、(B)、(C)的圖形，請依序寫出圖(一)、圖(二)、圖(三)所對應的方程式。(各 2 分)



圖(一)



圖(二)



圖(三)

(A) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$ (B) $y^2 = -12x$ (C) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

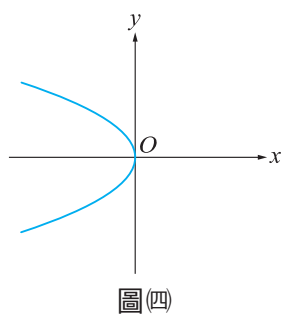
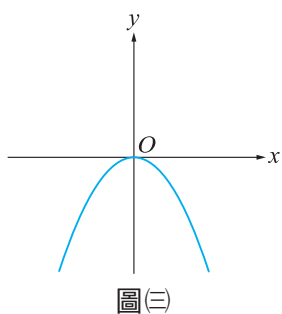
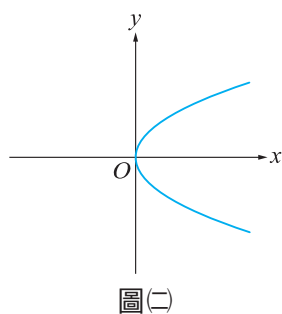
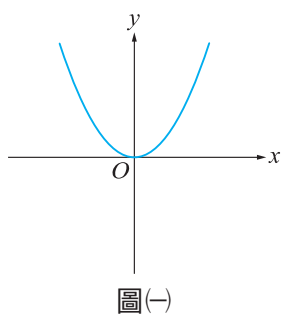
解 圖(一)的方程式為(B) $y^2 = -12x$

$$\text{圖(二)的方程式為(C) } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\text{圖(三)的方程式為(A) } \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$$

● 例題 5 拋物線的圖形與方程式(一)

已知拋物線 $y^2 = -x$ 的圖形是圖(一)、圖(二)、圖(三)、圖(四)之一，請參考拋物線的標準式，選出正確的選項，並說明理由。(8分)



解 拋物線方程式為 $y^2 = -x$

平方項出現在 y ，表示拋物線開口方向是左右

而 x 項的係數是 -1 (小於 0)，表示拋物線開口向左

故圖形為圖(四)

● 例題 6 拋物線的圖形與方程式(二)

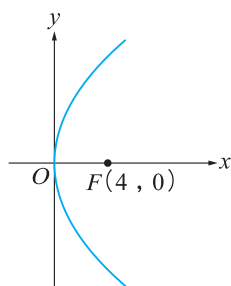
如右圖，拋物線的方程式為(A)、(B)、(C)、(D)其中之一，請選出正確的選項，並說明理由。(F 是拋物線的焦點)(8分)

(A) $y^2 = 4x$ (B) $y^2 = -4x$ (C) $y^2 = 16x$ (D) $y^2 = -16x$

解 觀察拋物線，其方程式形如 $y^2 = 4cx$ ， $c > 0$

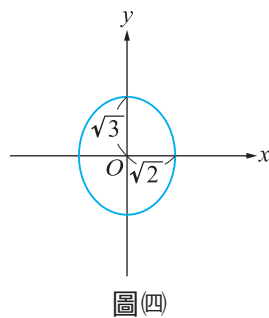
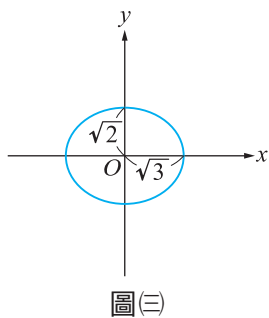
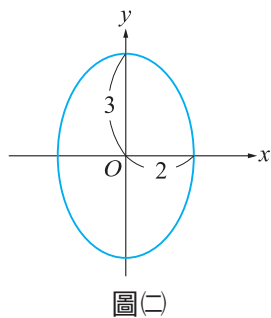
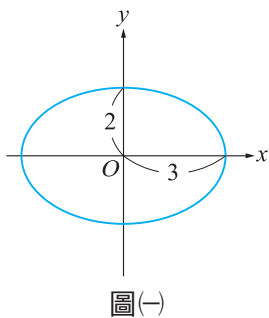
因為焦點為 $F(4, 0)$ ，得 $c = 4$

故知拋物線方程式為(C) $y^2 = 16x$



● 例題 7 橢圓的圖形與方程式(一)

已知橢圓 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的圖形是圖(一)、圖(二)、圖(三)、圖(四)之一，請參考橢圓的標準式，選出正確的選項，並說明理由。(8分)



解

橢圓方程式為 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$

$3 > 2$ ，橢圓圖形可能是圖(一)或圖(三)

$a^2 = 3$ ， $b^2 = 2$ ，得 $a = \sqrt{3}$ ， $b = \sqrt{2}$

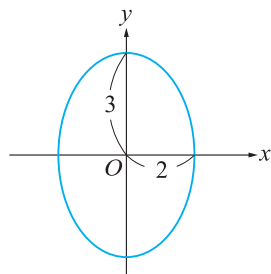
故圖形為圖(三)

● 例題 8 橢圓的圖形與方程式(二)

如右圖，已知橢圓的方程式為(A)、(B)、(C)、(D)其中之一，請選出正確的選項，並說明理由。(8分)

(A) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$ (B) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$

(C) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ (D) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$



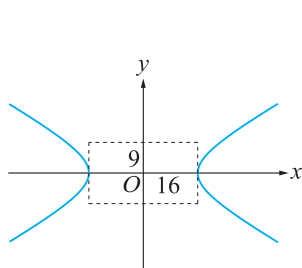
解

觀察橢圓，其方程式形如 $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

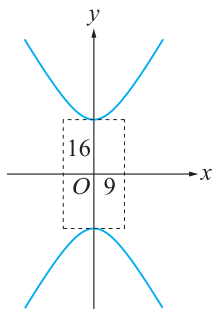
而 $b = 2$ ， $a = 3$ ，得橢圓方程式為(C) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

● 例題 9 雙曲線的圖形與方程式(一)

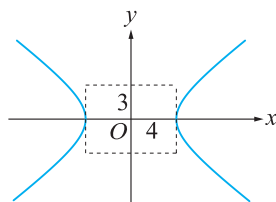
已知雙曲線 $-\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ 的圖形是圖(一)、圖(二)、圖(三)、圖(四)之一，請參考雙曲線的標準式，選出正確的選項，並說明理由。(8分)



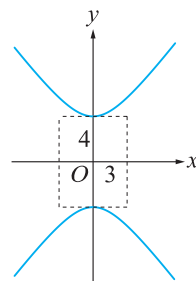
圖(一)



圖(二)



圖(三)



圖(四)

解

雙曲線方程式為 $-\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

圖形可能是圖(二)或圖(四)

$a^2 = 16$, $b^2 = 9$, 得 $a = 4$, $b = 3$

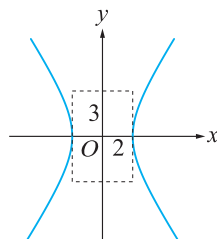
故圖形為圖(四)

● 例題 10 雙曲線的圖形與方程式(二)

如右圖，已知雙曲線的方程式為(A)、(B)、(C)、(D)其中之一，請選出正確的選項，並說明理由。(8分)

(A) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ (B) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$

(C) $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$ (D) $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1$



解

觀察雙曲線，其方程式形如 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

而 $a = 2$, $b = 3$, 得雙曲線方程式為(B) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$



2