

一、單選題（每題5分，共10分）

1. 已知二階方陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ，則 $AB = ?$

(A) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

(E) $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

解 $AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 2 + 3 \times 1 & 1 \times 0 + 3 \times 3 \\ 0 \times 2 + 1 \times 1 & 0 \times 0 + 1 \times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

故選(D)

2. 設矩陣 $A = [a_{ij}]_{3 \times 2}$ ，其中 $a_{ij} = \begin{cases} -1, & i < j \\ 0, & i = j \\ 1, & i > j \end{cases}$ ，則矩陣 A 所有元之和為何？

(A) -2

(B) 0

(C) 2

(D) 4

(E) 6

解 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ， $0 + (-1) + 1 + 0 + 1 + 1 = 2$

故選(C)



二、多選題（每題 5 分，所有選項均答對者得 5 分，錯一個選項得 3 分，錯兩個選項得 1 分，其餘不給分，共 10 分）

3. 下列哪些二階方陣有乘法反方陣？

(A) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$

(E) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

解 二階方陣 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 的 $ad - bc \neq 0$ ，則此方陣的乘法反方陣存在

(A) $\bigcirc : 2 \times 5 - 2 \times 4 = 10 - 8 = 2 \neq 0$

(B) $\times : 3 \times 6 - 9 \times 2 = 18 - 18 = 0$

(C) $\bigcirc : 2 \times 12 - 3 \times 4 = 24 - 12 = 12 \neq 0$

(D) $\bigcirc : 2 \times 3 - 1 \times (-3) = 6 + 3 = 9 \neq 0$

(E) $\times : 2 \times 6 - 3 \times 4 = 12 - 12 = 0$

故選(A)(C)(D)

4. 已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ，請選出正確的選項。

(A) A 是二階方陣

(B) A 有 2 列 2 行

(C) 第 $(1, 2)$ 元是 3

(D) $2A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

(E) $AA = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 9 & 16 \end{bmatrix}$

解 (A) $\bigcirc$ ：顯然正確

(B) $\bigcirc$ ：顯然正確

(C) $\times$ ：第 $(1, 2)$ 元是 1

(D) $\bigcirc : 2A = 2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

(E) $\times : AA = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 18 & 19 \end{bmatrix}$

故選(A)(B)(D)



三、填充題（每格 6 分，共 60 分）

5. 二階方陣 A 使得 $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ ， $A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ ，則：

(1) $A =$ _____。

(2) 若 $B = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ，則 $A + 2B =$ _____。

解

(1) 由已知， $A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ，故得 $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

(2) $A + 2B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 10 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 14 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

6. (1) 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ，若 $2X + 3A = 5B$ ，則矩陣 $X =$ _____。

(2) 已知 $M - N = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ ， $M + N = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$ ，則矩陣 $M =$ _____。

解

(1) 由已知， $2X = 5B - 3A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 9 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 10 \end{bmatrix}$ ，故得 $X = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

(2) 將已知兩式相加，得 $2M = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ ，故得 $M = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$



7. 已知二階方陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & k \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ，若 A 的乘法反方陣 A^{-1} 不存在，則 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解 A 的乘法反方陣 A^{-1} 不存在，則 $2 \times 3 - k \times 1 = 0$ ，解得 $k = 6$

8. 已知二階方陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ，假設有一矩陣 X 使得 $AX = \begin{bmatrix} -11 & 12 & 13 \\ -7 & 7 & 7 \end{bmatrix}$ ，則：

(1) X 為 階矩陣。

(2) $X = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解 (1) 因為 A 為 2×2 階矩陣， AX 為 2×3 階矩陣，故 X 為 2×3 階矩陣

$$(2) A^{-1} = \frac{1}{6-5} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\text{故 } X = A^{-1} \begin{bmatrix} -11 & 12 & 13 \\ -7 & 7 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -11 & 12 & 13 \\ -7 & 7 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$



9. (1) 二階方陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ a & b \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ 。若 $AB = BA$, 則數對 $(a, b) =$ _____。

(2) 已知矩陣 A 滿足 $A \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \end{bmatrix}$, 則矩陣 $A =$ _____。

解

(1) 由已知, $\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ a-b & -a+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-a & 5-b \\ a-2 & -5+b \end{bmatrix}$

$$\text{故得} \begin{cases} -3 = 2-a \\ 3 = 5-b \\ a-b = a-2 \\ -a+b = -5+b \end{cases}$$

解之, 得 $a=5$, $b=2$, 故數對 $(a, b) = (5, 2)$

(2) $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-4+3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$,

$$\text{故 } A = \begin{bmatrix} 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}$$

10. 已知三向量 $\vec{a} = (4, 1)$, $\vec{b} = (-2, 3)$, $\vec{c} = (2, 11)$, 若 $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{c}$, 則數對 $(x, y) =$ _____。

解

由已知, $x \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 11 \end{bmatrix}$, 即 $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 11 \end{bmatrix}$

因為 $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$,

所以 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 11 \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 28 \\ 42 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

故得數對 $(x, y) = (2, 3)$



四、計算題（每題 10 分，共 20 分）

11. 已知二階方陣 $A = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ ， $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ，若 $AX = B$ ， $Y = CX$ ，試求矩陣 Y 。

解 由已知， $X = A^{-1}B$ ，代入 $Y = CX$ 得 $Y = CA^{-1}B$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-21+20} \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{故 } Y = CA^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & -4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

12. 英文字母共有 26 個，所以我們可以將 $a, b, c, \dots, z$ 編成 01、02、……、26 等 26 個號碼，並以行矩陣表示，如 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 代表 a ， $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ 代表 b ，……， $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ 代表 z 。使用時，先將單字編為號碼，再以矩陣 X 表示此單字。例如，“cat”的編碼是 03，01，20，可用矩陣 $X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 表示，接著用矩陣運算加密後，再傳送出去。若小輝與小偉以此方式傳送訊息，並約定用方陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ 加密，例如 $AX = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ 。

- (1) 小輝要傳送 *zoo* 給小偉，試求加密後的訊息矩陣。（5 分）
- (2) 小輝收到小偉傳來的訊息（加密後）矩陣為 $\begin{bmatrix} 3 & 9 & 6 & 5 \\ 7 & 18 & 13 & 11 \end{bmatrix}$ ，試求小偉的原始訊息。（5 分）

解 (1) 首先將 *zoo* 編碼為 26，15，15，令 $X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 6 \\ 18 & 13 & 13 \end{bmatrix}，此為加密後的訊息矩陣$$

$$(2) \text{ 加密方陣的乘法反方陣 } A^{-1} = \frac{1}{2-3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{故知原始矩陣為 } \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 9 & 6 & 5 \\ 7 & 18 & 13 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 9 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

故得原始訊息的編碼為 12，09，15，14，即 *lion*

