【封面】113下翰林數學 新學測公式集數A / 紙質：特銅 120磅 / 無線膠裝 / G8K模大：43.6×30.3 cm / 88%列印

翰林數學

歷屆試題
實戰檢測

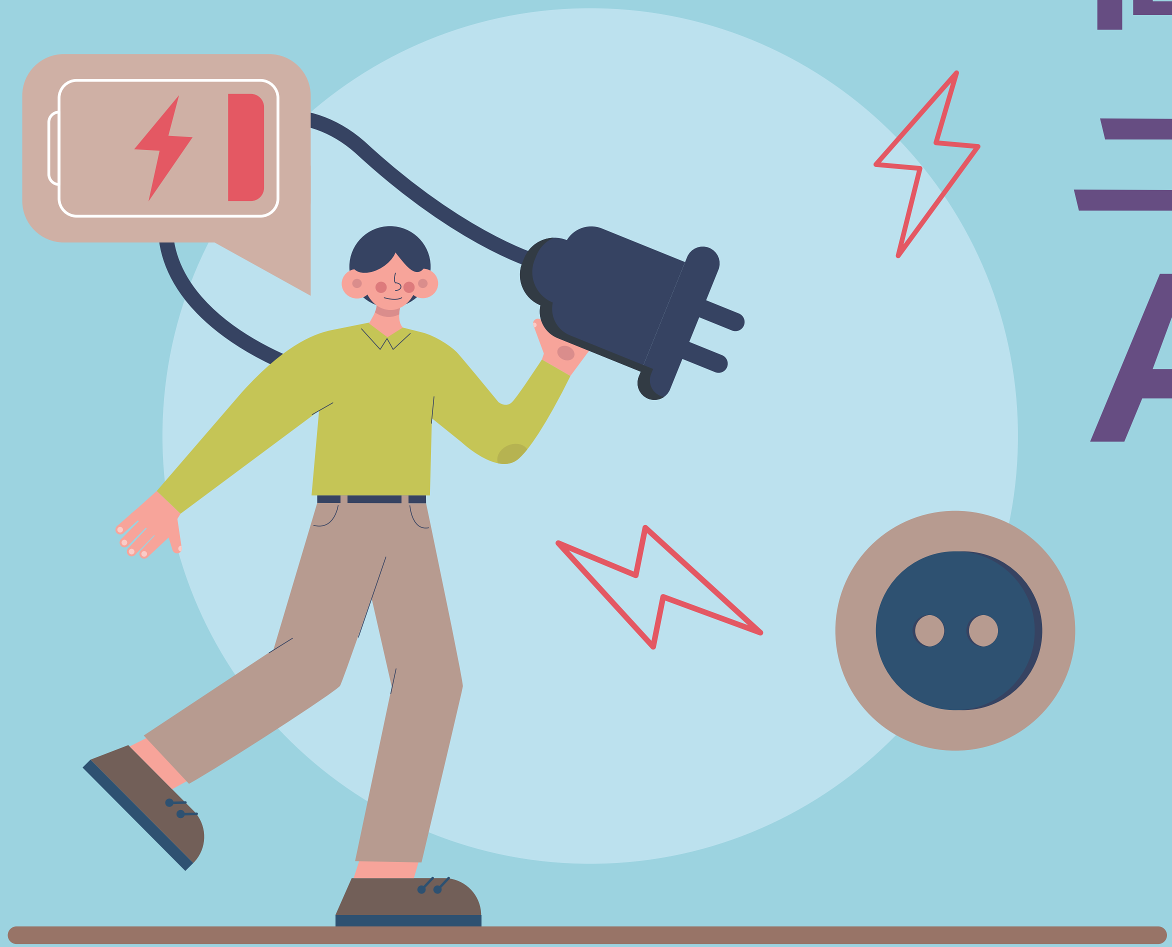
翰林數學

Suit you 你的合身教材

114學測公式集

新綱學測重要公式+練習題

高二A



快充學測・快衝大學

3年完整電子檔
純公式電子檔

翰林 相信學習 Believe in Learning

96330011-33

【封裡】113下翰林數學 新學測公式集數A / 紙質：特銅 120磅 / 無線膠裝 / G8K模大：43.6×30.3 cm / 88%列印

114學測公式集 前言與目錄

本文精選整理高中數學【數 A 第 3 冊與第 4 冊】的核心公式，旨在幫助同學快速回顧重要內容，提高複習效率，並強化關鍵概念，是學習和備考的得力助手！

數A 第3冊

數A 第4冊

1 弳

若一圓的半徑為 r，則弧長 s 所對應的圓心角 $\theta=\dfrac{s}{r}$ 弳.

由 $180°=\pi$ 弳，可得

$1°=\dfrac{\pi}{180}$ 弳 ≈ 0.01745 弳，1 弳 $=\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^{\circ}\approx 57.3°$.

例題

請將下表完成：

度	0°	30°	45°	60°	90°	135°	180°	210°	240°	270°	360°
弳	0 弳	$\dfrac{\pi}{6}$ 弳		$\dfrac{\pi}{3}$ 弳		$\dfrac{3\pi}{4}$ 弳	π 弳	$\dfrac{7\pi}{6}$ 弳		$\dfrac{3\pi}{2}$ 弳	

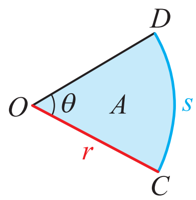
解

$45°=\dfrac{45}{180}\pi=\dfrac{\pi}{4}$ 弳　　$90°=\dfrac{90}{180}\pi=\dfrac{\pi}{2}$ 弳

$240°=\dfrac{240}{180}\pi=\dfrac{4}{3}\pi$ 弳　　$360°=\dfrac{360}{180}\pi=2\pi$ 弳

2 扇形的弧長與面積公式

已知圓半徑為 r，扇形 COD 的圓心角 $\angle COD=\theta$（弳），$0\leq\theta<2\pi$，如圖，令扇形的弧長為 s，面積為 A，則：



(1) 扇形的弧長 $s=r\theta$.

(2) 扇形的面積 $A=\dfrac{1}{2}r^2\theta=\dfrac{1}{2}rs$

例題 1

已知一扇形半徑為 6 公分，圓心角為 120°，試求此扇形的弧長及面積.

解

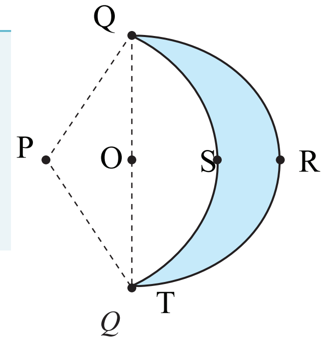
圓心角 $\dfrac{120}{180}\pi=\dfrac{2\pi}{3}$

故弧長 $6\cdot\dfrac{2\pi}{3}=4\pi$（公分）

面積 $\dfrac{1}{2}\cdot 6^2\cdot\dfrac{2\pi}{3}=12\pi$（平方公分）

例題 2

有一款設計圖：圖中，圓弧 QRT 是一個以 O 點為圓心、$\overline{QT}$ 為直徑的半圓，$\overline{QT}=2\sqrt{3}$. 圓弧 QST 的圓心在 P 點，$\overline{PQ}=\overline{PT}=2$. 求圓弧 QRT 與圓弧 QST 所圍出的灰色區域 $QRTSQ$ 的面積. 〔109 學測修〕



解

圓弧QRT面積＝半圓面積－斜線區域面積

斜線區域面積＝扇形 $QSTP$ 面積－$\triangle OPT$ 面積

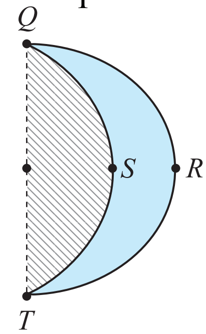
半圓面積 $=\dfrac{1}{2}\times\pi\times\sqrt{3}^{2}=\dfrac{3\pi}{2}$

扇形 $QSTP$ 面積 $=\dfrac{120°}{360°}\cdot\pi\cdot 2^{2}=\dfrac{4}{3}\pi$

$\triangle OPT$ 面積 $=\dfrac{1}{2}\times 1\times 2\sqrt{3}=\sqrt{3}$

故 $QRTSQ$ 的面積 $=\dfrac{3\pi}{2}-\left(\dfrac{4\pi}{3}-\sqrt{3}\right)$

$=\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}$（平方單位）



3(1) 正弦、餘弦的和角公式與差角公式

對於任意角 α 與 β,

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$,

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$,

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$,

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

3(2) 正切的和角公式與差角公式

當 $\tan\alpha$, $\tan\beta$, $\tan(\alpha+\beta)$, $\tan(\alpha-\beta)$ 均有意義時,

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta},$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}.$$

例題

設 $0°<\alpha<180°$，$0°<\beta<180°$，且 $\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$，$\cos\beta=\dfrac{5}{13}$，試求 $\sin(\alpha-\beta)$ 與 $\tan(\alpha-\beta)$ 的值.

解

$$\cos\alpha=-\frac{4}{5}\Rightarrow\tan\alpha=-\frac{3}{4},\ \sin\alpha=\frac{3}{5}$$

$$\cos\beta=\frac{5}{13}\Rightarrow\tan\beta=\frac{12}{5},\ \sin\beta=\frac{12}{13}$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}-\left(-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{12}{13}\right)=\frac{63}{65}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\left(-\frac{3}{4}\right)-\frac{12}{5}}{1+\left(-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{12}{5}\right)}=\frac{63}{16}$$

4 直線的斜角

設直線 L 的斜角為 θ（L 不為鉛垂線），則 L 的斜率為 $\tan\theta$.

例題

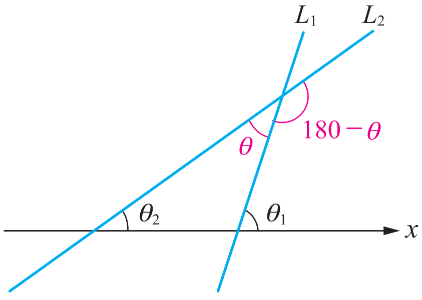
已知直線 L 的斜角為 $60°$，並通過點 $(2,-1)$. 試求 L 的方程式.

解

直線 L 的斜角為 $60°$，故其斜率 $m=\tan 60°=\sqrt{3}$.
又 L 通過點 $(2,-1)$，故其直線方程式為 $y+1=\sqrt{3}(x-2)$，
即 $y=\sqrt{3}x-(2\sqrt{3}+1)$.

5 兩直線的夾角

已知直線 L_1 與 L_2 的斜率時，就可以分別求出 L_1、L_2 的斜角 θ_1、θ_2（$\theta_1>\theta_2$），如右圖所示，此時 L_1 與 L_2 的夾角 θ，即可由 $\theta_1-\theta_2$ 得來，同時 $180°-\theta$ 也是 L_1 與 L_2 的夾角.



例題

試求兩直線 L_1：$\sqrt{3}x-y+1=0$ 與 L_2：$x-\sqrt{3}y+2=0$ 的夾角.

解

由斜角與斜率關係知若 L_1、L_2 的斜角分別為 θ_1、θ_2，斜率分別為 m_1、m_2 則

$\tan\theta_1=m_1=\sqrt{3}$

$\tan\theta_2=m_2=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

因此由 tan 的差角公式可得

$$\tan(\theta_1-\theta_2)=\frac{\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\theta_1-\theta_2=30°$，因此 L_1、L_2 夾角為 $30°$ 或 $150°$

6 二倍角公式

(1) $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$.

(2) $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta$.

(3) $\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$.（其中 $\tan\theta$，$\tan 2\theta$ 均有意義）

例題

設 $90°<\theta<180°$，且 $\sin\theta=\dfrac{4}{5}$，試求：$\sin 2\theta$，$\cos 2\theta$ 的值.

解

因為 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\dfrac{16}{25}=\dfrac{9}{25}$，又 $90°<\theta<180°$，所以 $\cos\theta=-\dfrac{3}{5}$，故由二倍角公式可得

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\frac{4}{5}\times\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{24}{25}$$

$$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\times\left(\frac{4}{5}\right)^2=-\frac{7}{25}$$

7 半角公式

$$\sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}},\ \cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}},$$

等號右邊取正或取負由 $\frac{\theta}{2}$ 所在的象限決定.

例題

試求 $\sin 15°$, $\cos 15°$ 及 $\tan 15°$ 的值.

解

$$\sin 15°=\sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

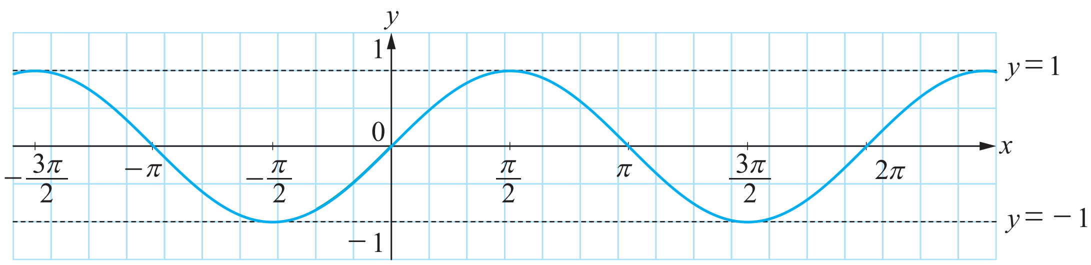
$$\cos 15°=\sqrt{\frac{1+\cos 30°}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

由 $\sin 15°$, $\cos 15°$ 可求 $\tan 15°=\dfrac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=2-\sqrt{3}$

8 正弦函數

正弦函數 $y=\sin x$ 的圖形如下圖,



且具有以下的性質:

(1) 定義域為所有實數, 亦可記為 $(-\infty, \infty)$.

(2) 值域為 $[-1, 1]$.

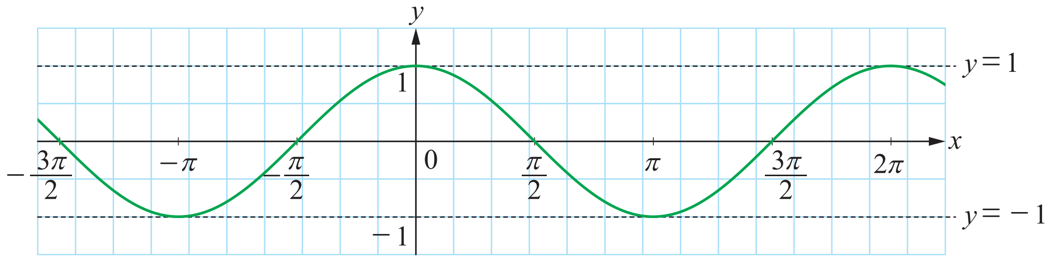
(3) 週期為 2π.

(4) 振幅為 1.

(5) 圖形對稱於原點.

9 餘弦函數

餘弦函數 $y=\cos x$ 的圖形如下圖，



且具有以下的性質：

(1) 定義域為所有實數，亦可記為 $(-\infty, \infty)$.

(2) 值域為 $[-1, 1]$.

(3) 週期為 2π.

(4) 振幅為 1.

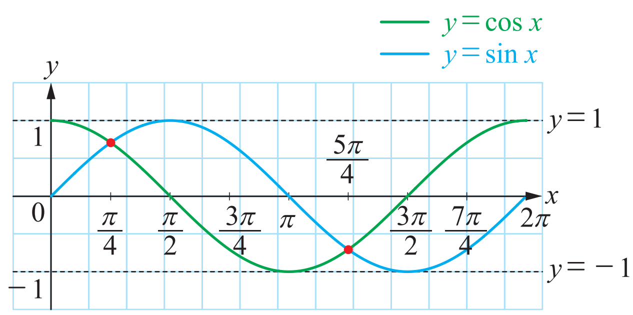
(5) 圖形對稱於 y 軸.

例題

將 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 的圖形畫在同一平面上，並利用圖形回答下列各題：在 $0\le x\le 2\pi$ 時，(1)解 $\sin x=\cos x$. (2)何時 $\sin x\le\cos x$？

解

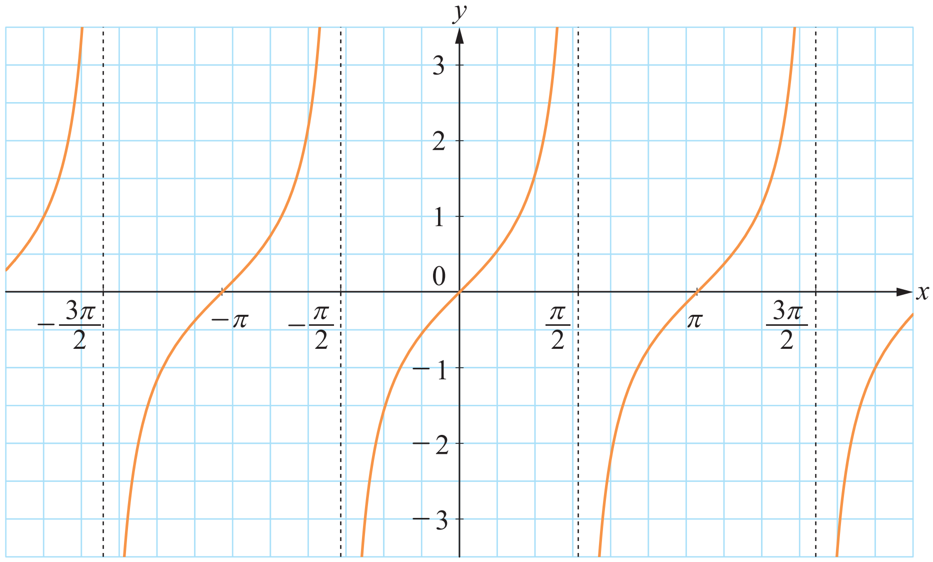
(1) 上述 2 個交點的 x 坐標滿足 $\sin x=\cos x$，由圖形看出其共同函數值不為 0，所以 $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}=1$，在區間 $[0, 2\pi]$ 中有兩解 $x=\dfrac{\pi}{4}$，$x=\dfrac{5\pi}{4}$，



(2) 由(1)及圖形解為 $0\le x\le\dfrac{\pi}{4}$ 或 $\dfrac{5\pi}{4}\le x\le 2\pi$

10 正切函數

正切函數 $y=\tan x$ 的圖形如圖，



且具有以下的性質：

(1) 定義域為 $\left\{x \,\middle|\, x \text{ 為實數且 } x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k \text{ 為整數}\right\}$.

(2) 值域為所有實數，亦可記為 $(-\infty,\ \infty)$.

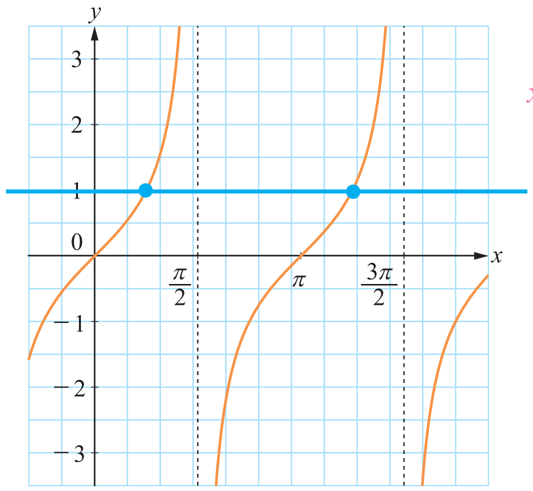
(3) 週期為 π.

(4) 圖形對稱於原點.

例題

在 $0\leq x\leq 2\pi$ 範圍內，試求方程式 $\tan x=1$ 的解.

解



由圖形可得

$x=\frac{\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4}$

11 函數圖形的平移及伸縮

1. 平移：設 h，$k>0$.

(1) $y=f(x)+k$ 的圖形是將 $y=f(x)$ 的圖形向上平移 k 單位而得.

(2) $y=f(x)-k$ 的圖形是將 $y=f(x)$ 的圖形向下平移 k 單位而得.

(3) $y=f(x+h)$ 的圖形是將 $y=f(x)$ 的圖形向左平移 h 單位而得.

(4) $y=f(x-h)$ 的圖形是將 $y=f(x)$ 的圖形向右平移 h 單位而得.

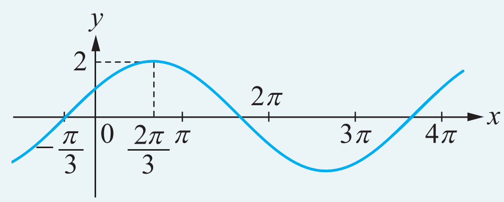
2. 伸縮：設 $a>0$.

(1) $y=af(x)$ 的圖形是 $y=f(x)$ 的圖形上每一點的 y 坐標都乘上 a 倍.

(2) $y=f(ax)$ 的圖形是 $y=f(x)$ 的圖形上每一點的 x 坐標都乘上 $\dfrac{1}{a}$ 倍.

例題 1

若函數 $f(x)=2\sin\left(\dfrac{1}{2}x+\theta\right)$ 的部分圖形如右圖所示，其中 $0\leq\theta\leq2\pi$，則 θ 的值為何？



解

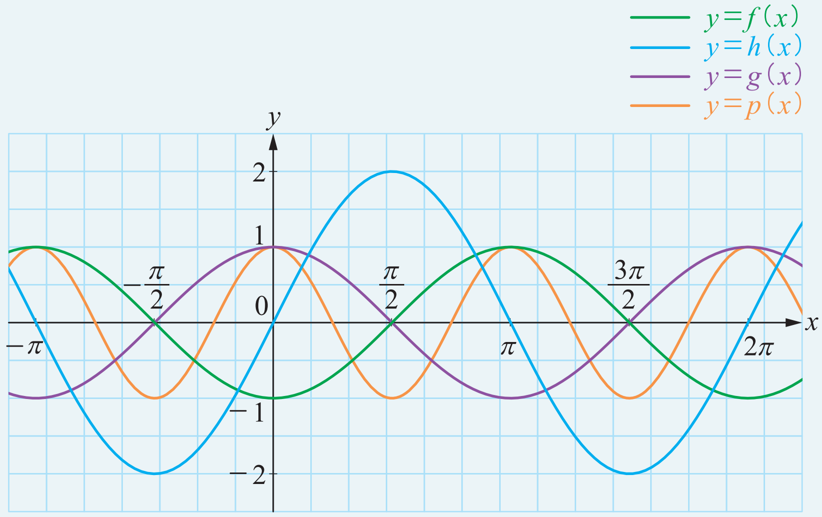
當 $x=\dfrac{2\pi}{3}$ 時，$y=2\sin\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\pi}{3}+\theta\right)=2$，

化簡得 $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\theta\right)=1$，即 $\dfrac{\pi}{3}+\theta=\dfrac{\pi}{2}$

故 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$

例題 2

試判斷下圖中，何者為 $y=2\sin x$，$y=\cos 2x$，$y=si\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$？



解 $y=2\sin x$ 振幅為 2

$y=\cos 2x$，$y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ 振幅為 1，

且 $y=\cos 2x$ 週期 π，$y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ 週期 2π

故藍色曲線為 $y=2\sin x$ 圖形，紫色曲線為 $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ 圖形

橘色曲線為 $y=\cos 2x$ 圖形

12 正、餘弦函數的疊合公式

設 a，b 是不全為 0 的實數，則

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta),$$

其中 θ 滿足 $\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

例題 1

考慮 $\sqrt{3}\sin x+\cos x$，試求：

(1) 疊合成正弦曲線的形式，即 $r\sin(x+\pi)$，其中 $r>0$，$-\pi<\theta<\pi$.

(2) 疊合成餘弦曲線的形式，即 $r\cos(x+\pi)$，其中 $r>0$，$-\pi<\theta<\pi$.

解 (1) 依據正弦函數的和角公式，得

$$\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}\sin x+\sin\frac{\pi}{6}\cos x\right)$$

$$=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right).$$

(2) 依據正弦函數的和角公式，得

$$\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)=2\left(\sin\frac{\pi}{3}\sin x+\cos\frac{\pi}{3}\cos x\right)$$

$$=2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right).$$

例題 2

試求 $y=\sin^2 x-4\sin x\cos x+3\cos^2 x$ 的最大值與最小值.

解

$$y=\frac{1-\cos 2x}{2}-2\sin 2x+3\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}\quad(\text{二倍角公式})$$

$$=2+\cos 2x-2\sin 2x$$

$$=2+\sqrt{1+2^2}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2x-\frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2x\right)$$

$$=2+\sqrt{5}\sin(\phi-2x),\ \left(\sin\phi=\frac{1}{\sqrt{5}},\ \cos\phi=\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$-\sqrt{5}\leq\sqrt{5}\sin(\phi-2x)\leq\sqrt{5}$

$2-\sqrt{5}\leq 2+\sqrt{5}\sin(\phi-2x)\leq 2+\sqrt{5}$

故最大值為 $2+\sqrt{5}$，最小值為 $2-\sqrt{5}$

13(1) 指數函數

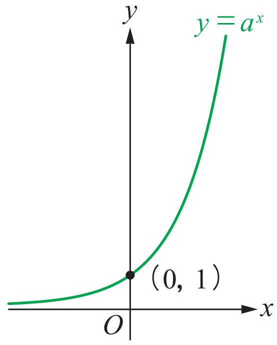
設 $a>0$，且 $a\neq 1$，則稱函數 $f(x)=a^x$ 是以 a 為底的指數函數.

13(2) 指數函數的定義域與值域

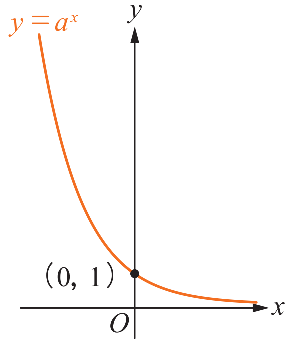
設 $a>0$，且 $a\neq 1$，則指數函數 $f(x)=a^x$ 的定義域為所有實數，且值域為所有正實數.

13(3) 指數函數圖形

設 $a>0$，且 $a\neq 1$，則函數 $y=a^x$ 的圖形如下：



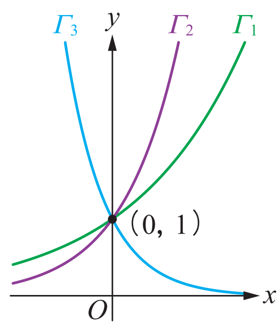
$a>1$



$0<a<1$

例題 1

如圖的三條曲線分別為 $y=2^x$, $y=4^x$, $y=\left(\frac{1}{7}\right)^x$ 的圖形．試判斷哪個圖形代表哪個函數？



解

(1) 觀察 $y=2^x$, $y=4^x$ 的底數都大於 1，因此函數圖形是愈往右邊愈陡峭．且 $y=4^x$ 比 $y=2^x$ 更陡峭，因此 Γ_1 為 $y=2^x$ 的圖形，Γ_2 為 $y=4^x$ 的圖形．

(2) 再觀察 $y=\left(\frac{1}{7}\right)^x$ 的底數小於 1，因此函數圖形是愈往左邊愈陡峭．

因此 Γ_3 為 $y\left(\frac{1}{7}\right)^x$ 的圖形．

例題 2

在坐標平面上，Γ 是邊長為 4 的正方形，其中心位在點（1, 1），且各邊與坐標軸平行．已知函數 $y=a\times 2^x$ 的圖形與 Γ 相交，其中 a 為實數，求 a 的最大可能範圍為？〔110 學測〕

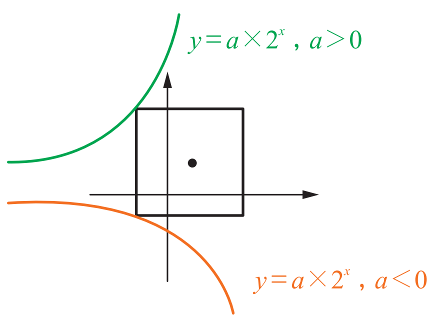
解

考慮極端情形（$a>0$ 時 $y=a\times 2^x$ 正好與 Γ 交於（-1, 3）；$a<0$ 時 $y=a\times 2^x$ 正好與 Γ 交於（-1, -1））

代入（-1, 3）得 $a\times 2^{-1}\leq 3\Rightarrow a\leq 6$

代入（-1, -1）得 $a\times 2^{-1}\geq -1\Rightarrow a\geq -2$

故 $-2\leq a\leq 6$



14 常用對數的基本性質

設 r, $s>0$, t 為實數. 則有以下性質:

(1) $\log r+\log s=\log rs$.　　(2) $\log r-\log s=\log\dfrac{r}{s}$.　　(3) $\log r^t=t\times\log r$.

例題 1

試計算下式的值:

$$\log\frac{4}{7}-\frac{4}{3}\log\sqrt{8}+\frac{2}{3}\log\sqrt{343}.$$

解

$$\log\frac{4}{7}-\frac{4}{3}\cdot\log 2^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\log 7^{\frac{3}{2}}$$

$$=\log\frac{4}{7}-\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\log 2+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\log 7$$

$$=\log\frac{4}{7}-\log 2^2+\log 7=\log\left(\frac{4}{7}\times\frac{1}{4}\times 7\right)=\log 1=0$$

例題 2

設 a, b, c 為實數且滿足 $\log a=1.1$、$\log b=2.2$、$\log c=3.3$. 試選出正確的選項.
($\log 2\approx 0.3010$)

(A) $a+c=2b$
(B) $1<a<10$
(C) $1000<c<2000$
(D) $b=2a$
(E) a, b, c 成等比數列　　〔109 學測〕

解

由 $\log a+\log c=2\log b$
得 $\log ac=\log b^2$
即 $ac=b^2$ ((E)正確, (A)(D)不正確)
$\log a=1.1\Rightarrow a=10^{0.1}\times 10^1\Rightarrow 1<a<100$ ((B)不正確)
$\log c=3.3\Rightarrow c=10^{0.3}\times 10^3\Rightarrow 1000<c<2000$ ((C)正確)
($\log 2=0.3010$ 即 $10^{0.3010}\sim 2$)

15 以 a 為底數的對數定義

設底數 $a>0$, $a\neq 1$ 且 $r>0$, 若實數 b 滿足 $a^b=r$, 則稱 b 為"以 a 為底數時, r 的對數", 記為 $b=\log_a r$.

例題 1

試求下列各值：

(1) $\log_2 16$.　　(2) $\log_{27} 9$.

解

(1) 由於 $16=2^4$, 因此 $\log_2 16=4$.

(2) 由 $9=3^2=(3^3)^{\frac{2}{3}}=27^{\frac{2}{3}}$, 得 $\log_{27} 9=\dfrac{2}{3}$.

例題

若 $\log_a 729$ 為正整數, 則正整數 a 共有多少個?

解

令 $\log_a 729=n \Rightarrow 729=a^n \Rightarrow a^n=3^6$

故 $a=3, 3^2, 3^3, 3^6$

故 4 個

16 換底公式

設 $a>0$, 且 $a\neq 1$, 對於任意正數 r, 則 $\log_a r=\dfrac{\log r}{\log a}$.

例題

(1) 試利用換底公式以 $\log 2$ 表示 $\log_2 200$.

(2) 若將 $\log_2 3x$ 表示成 $a\log x+b$ 的形式, 試求實數 a, b.

解

(1) $\log_2 200=\dfrac{\log 200}{\log 2}=\dfrac{\log 100+\log 2}{\log 2}=\dfrac{2+\log 2}{\log 2}$.

(2) $\log_2 3x=\dfrac{\log 3x}{\log 2}=\dfrac{\log x+\log 3}{\log 2}=\dfrac{1}{\log 2}\log x+\dfrac{\log 3}{\log 2}$

故 $a=\dfrac{1}{\log 2}$, $b=\dfrac{\log 3}{\log 2}$

17 對數函數

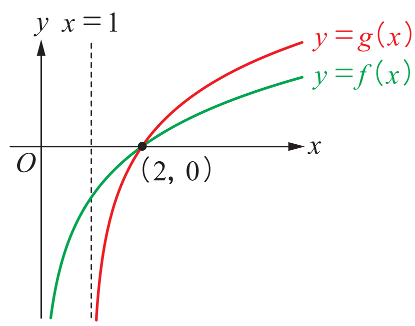
設 $a>0$, $a\neq 1$, 且 x 是任意正數, 則稱函數

$$f(x)=\log_a x$$

為以 a 為底數的對數函數, 其定義域為所有正實數, 值域為所有實數.

例題 1

右圖為兩函數 $f(x)=\log_2(ax+b)$, $g(x)=\log_2(cx+d)$ 的函數圖形, 試比較 a 與 c 的大小.



解

由 $x=1$ 與圖形交點判斷得 $\log_2(c+d)<\log_2(a+b)<0$

$c+d<a+b<1$ ………………①

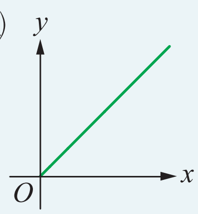
再由圖形通過 $(2, 0)$ 即 $\log_2(2a+b)=0=\log_2(2c+d)$

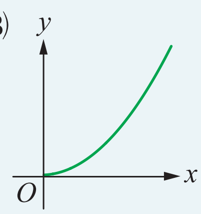
得 $2a+b=1=2c+d$…………②

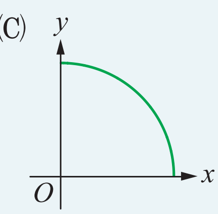
由①② $1-c<1-a$, 且 a、$c>0$　故 $c>a$ (>0)

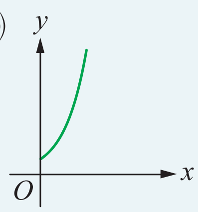
例題 2

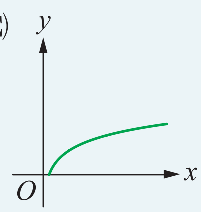
若 $\log_4 y=\log_2 x$, 試求 y 與 x 的圖形最接近下列何者?

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

(E) 

解

$\log_4 y=\dfrac{\log y}{\log 4}$, $\log_2 x=\dfrac{\log x}{\log 2}$

故 $\log y=2\log x \Rightarrow \log y=\log x^2$

得 $y=x^2$, x, $y>0$

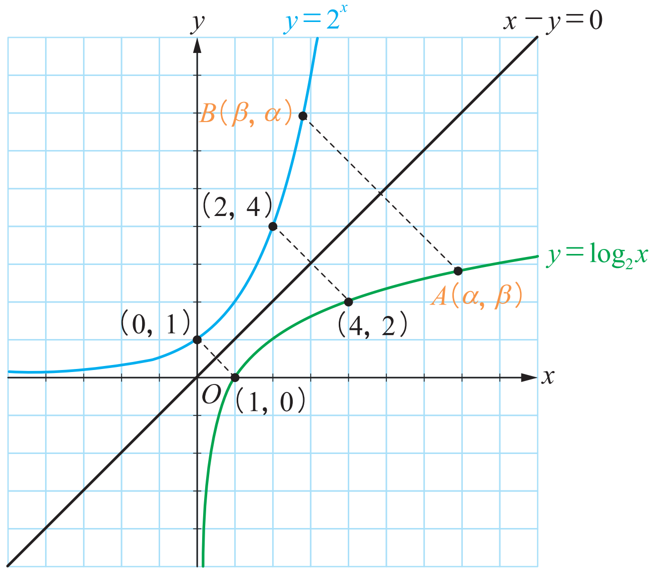
因此, 圖(B)符合

18 比較 $y=\log_a x$ 與 $y=a^x$ 的圖形

設 $a>0$ 且 $a\neq 1$，則 $y=\log_a x$ 與 $y=a^x$ 的兩個函數圖形對稱於直線 $x-y=0$.

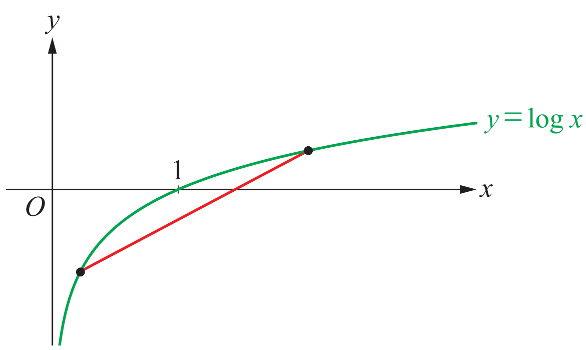
例題

將 $y=\log_2 x$ 與 $y=2^x$ 兩函數的圖形放在同一個坐標平面上觀察，如圖所示，我們可以發現兩圖形對稱於直線 $x-y=0$.



19 對數函數 $\log_a x$，$a>1$ 圖形的凹向性

(1) 觀察圖形可以看出常用對數函數 $y=\log x$ 的函數圖形為凹口向下.



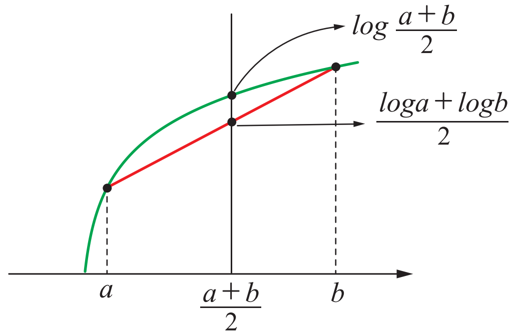
(2) 因為 $\log x=\dfrac{\log_a x}{\log_a 10}=\dfrac{\log_2 x}{\log_2 10}$，由於 $\log_a 10>0$，所以對數函數 $\log_a x$ 也是凹口向下的.

例題

已知實數 a, $b>1$, 試利用函數圖形的凹向性比較 $\log\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ 與 $\dfrac{\log a+\log b}{2}$ 的大小關係.

解 如圖

$$\frac{\log a+\log b}{2}<\log\frac{a+b}{2}$$



如圖：

$$\frac{\log a+\log b}{2}<\log\frac{a+b}{2}$$

20 單利與複利

設本金為 a, 每期利率為 r.

(1) 以單利孳息, 經過 n 期後, 本利和為 $a\ (1+nr)$.

(2) 以複利孳息, 每年的本利和是前一期的 $(1+r)$ 倍, 故 n 期後的本利和是

$$\underbrace{a(1+r)(1+r)\cdots\cdots(1+r)}_{n\text{ 個}}=a(1+r)^n.$$

(3) 零存整付

複利計算下, n 期後可以領回的本利和為

$$a(1+r)^n+a(1+r)^{n-1}+\cdots+a(1+r)^2+a(1+r)$$

$$=a(1+r)\times\frac{(1+r)^n-1}{r}\ (\text{元}).$$

例題

小明每年固定購買某基金 10 萬元, 在年報酬率 8%且以複利計息的情況下, 他至少需要多少年, 才可以累積到人生的第一桶金 100 萬元? (無條件進入至整數位)

解 設 n 年後, 他的本利和超過 100 萬, 故

$$10\times1.08\times\frac{(1.08)^n-1}{0.08}\geq100,$$

化簡得 $(1.08)^n\geq1.74074074$.

不等式的兩邊同時取常用對數, 其大小關係並無改變, 得

$n\times\log 1.08\geq\log 1.74074074$,

所以

$$n\geq\frac{\log 1.74074074}{\log 1.08}\approx7.202484882,$$

所以最少需 8 年.

21 常數 e

n 愈來愈大時，$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 會愈接近一個數 2.718281828⋯，這個常數是一個無理數，特別記為 e. 稱為自然對數的底數.

例題

年利率 100%，若存款 1 元，（平年）每天複利計息一次，則一年後的本利和為

$\left(1+\dfrac{1}{365}\right)^{365}\approx 2.71457$ 元.

如果要求銀行每一秒，甚至每 0.1 秒都計息一次，本利和是否會愈來愈大？參考右表，可觀察得知

$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 會趨近一個定值.

一年計息頻率	期數	本利和
1 年	1	2.000
半年	2	2.250
1 個月	12	2.613
1 日	365	2.715
1 秒	31536000	2.717
⋮	⋮	⋮

22(1) 向量的坐標表示法與長度

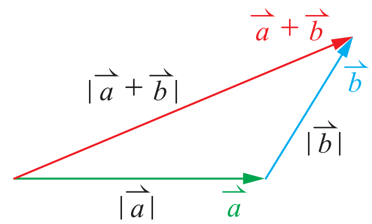
坐標平面上的任意一個向量 $\vec{v}$，將始點放在原點，設終點坐標為 (x, y)，則：$\vec{v}=(x, y)$ 稱為 $\vec{v}$ 的坐標表示. $|\vec{v}|=\sqrt{x^2+y^2}$ 為 $\vec{v}$ 的長度.

22(2) 三角不等式

設 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 為任意兩向量. 則

$$|\vec{a}+\vec{b}|\leq|\vec{a}|+|\vec{b}|,$$

等號在 $\vec{a}$, $\vec{b}$, 或 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 中有零向量時成立.



例題 1

設向量 $\vec{a}=(-1, 2)$，$\vec{b}=(3, 4)$，$\vec{c}=(1, 3)$，試求：

(1) $2\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}$.　　(2) $|2\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}|$.

解

(2) 由向量加減法及係數積可得

$2\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}=2(-1, 2)+(3, 4)-3(1, 3)$

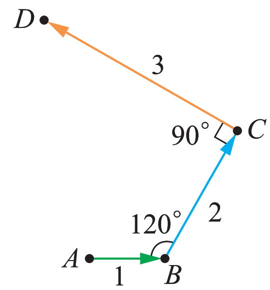
$=(-2, 4)+(3, 4)-(3, 9)=(-2, -1)$.

(2) $|2\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}|$ 即第(1)小題 $2\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}$ 的長度，因此

$|2\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}|=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$.

例題 2

如圖所示，試求 AD 的值.



解

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$

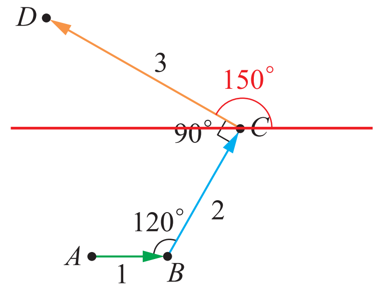
$|\overrightarrow{AD}|^2=(\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD})=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})$

$=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CD}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$

$=1^2+2^2+3^2+2\cdot1\cdot2\cdot\cos 60°+2(2\cdot3\cdot\cos 90°)+2\cdot(1\cdot3\cdot\cos 150°)$

$=1+4+9+2+0+2\left(3\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

$=16-3\sqrt{3}$



23 向量的線性組合

若 $\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 為平面上兩個不平行的非零向量，則平面上任意一個向量 $\overrightarrow{OP}$ 必能唯一表成

$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$

的形式，其中 x，y 為實數.

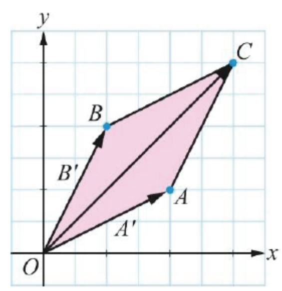
例題

設 $\overrightarrow{OA}=(2,\ 1)$，$\overrightarrow{OB}=(1,\ 2)$，若 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，且 $0\leq x\leq 1$，$0\leq y\leq 1$，x，y 為實數，試在平面上標示出所有 P 點所形成的區域.

解

令 $\overrightarrow{OA'}=x\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB'}=y\overrightarrow{OB}$，因為 $0\leq x\leq 1$，所以點 A' 必落在 $\overline{OA}$ 上. 同理，點 B' 也必落在 $\overline{OB}$ 上.

$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}$，故 $OA'PB'$ 形成平行四邊形. 從而得知點 P 必定位於平行四邊形 $OACB$ 及其內部



24 分點公式

設 P 點是線段 $\overline{AB}$ 上的點，且滿足 $\overline{PA}:\overline{PB}=m:n$，則對任一點 O，

$\overrightarrow{OP}=\dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$.

例題

設 $A(3,\ -6)$，$B(-7,\ 9)$為平面上相異兩點，P 為 $\overline{AB}$ 上一點，且滿足 $\overline{AP}:\overline{BP}=3:2$，試求 P 點的坐標.

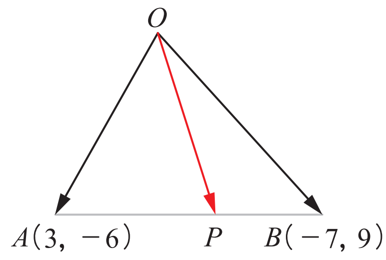
解 因為 P 點在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AP}:\overline{BP}=3:2$，

取 O 為原點，則 $\overrightarrow{OA}=(3,\ -6)$，$\overrightarrow{OB}=(-7,\ 9)$，

由分點公式

$$\overrightarrow{OP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{OB}=\frac{2}{5}(3,\ -6)+\frac{3}{5}(-7,\ 9)=(-3,\ 3),$$

故得 P 點的坐標為 $(-3,\ 3)$.



25 三點共線

平面上的相異四點 P，A，B，O，其中 O 不在直線 AB 上. 若 $\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$，則 P，A，B 三點共線的充要條件為 $\alpha+\beta=1$.

例題

設 G 為 $\triangle ABC$ 的重心，O 為平面上任一點，

(1) 若 $\overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，試求 x，y 之值.

(2) 承(1)，試導出 $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$.

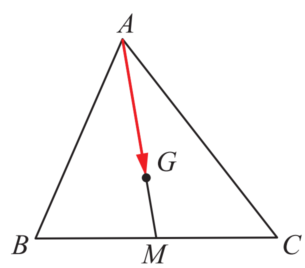
解 (1) 如圖. 設 M 為 $\overline{BC}$ 中點，由分點公式可得

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC},$$

由重心的性質可得

$$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC},$$

故得 $x=\frac{1}{3}$，$y=\frac{1}{3}$.



(2) 因為 $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，所以 $\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OA}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+\frac{1}{3}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$，

整理得 $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$.

若 $\triangle ABC$ 的頂點坐標分別為 $A(a_1,\ a_2)$，$B(b_1,\ b_2)$，$C(c_1,\ c_2)$，

由上例計算得重心 G 的坐標為 $\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3},\ \frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$

26 平面向量的內積

(1) 如果 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 之中有一為零向量, 則其內積為 0.

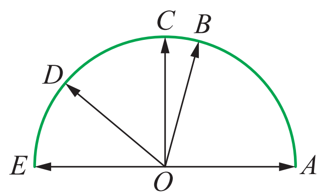
(2) 坐標平面上兩非零向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的內積為 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$, 其中 θ 為 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角.

(3) 坐標平面上兩向量 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ 的內積

$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$.

例題

如右圖所示, 已知 A, B, C, D, E 為單位圓上五個點, O 為圓心, 試問 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$ 中, 哪兩個向量內積最大?



解

因 $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$, $\overline{OE}$ 長度皆相同

考慮 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ 長度固定時, θ 愈小, $\cos\theta$ 愈大

$\vec{a}\cdot\vec{b}$ 也會大

因此 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$ 最大

27 兩向量垂直的判定法則

不論是平面或空間向量, 若 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 為兩個非零向量, 則:

(1) 若 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 互相垂直, 則 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

(2) 若 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, 則 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 互相垂直.

例題

已知 O 為原點, 且 A 點的坐標為 $(-3,\ 5)$, B 點在直線 $y=2$ 上, 若 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$, 試求 B 點的坐標.

解

令 B 坐標 $(x,\ 2)$

$\overrightarrow{OA}=(-3,\ 5)$, $\overrightarrow{OB}=(x,\ 2)$

由 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$ 知 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-3x+10=0$

得 $x=\dfrac{10}{3}$

28 內積的基本性質

不論是平面或空間向量，設 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 為任意向量，α 為任意實數，則：

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.

(2) $(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\alpha\vec{b})=\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

(3) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.

(4) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$.

例題

已知坐標平面上三點 $A(3,\ -2)$，$B(-1,\ 1)$，$C(5,\ 4)$，若 t 為實數，當 $|t\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|$ 有最小值時，t 的值.

解

$t\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=(-4t,\ 3t)+(2,\ 6)=(-4t+2,\ 3t+6)$

$$|t\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|^2=(t\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(t\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=t^2|\overrightarrow{AB}|^2+2t\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+|\overrightarrow{AC}|^2$$

$$=25t^2+20t+40=25\left(t+\frac{2}{5}\right)^2+36$$

故 $t=-\dfrac{2}{5}$ 時有最小值

29 柯西不等式

(1) 向量形式：若 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 為平面上任意兩非零向量，則 $|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leq|\vec{a}||\vec{b}|$，且等號成立時若且唯若 $\vec{a}\parallel\vec{b}$.

(2) 一般形式：若 a_1，a_2，b_1，b_2 為任意實數，則

$$({a_1}^2+{a_2}^2)({b_1}^2+{b_2}^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2)^2,$$

且等號成立於 $a_1b_2=a_2b_1$ 時. $\left(\text{如果 } b_1b_2\neq0\text{，可寫成 } \dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}\right)$

例題

設實數 x，y 滿足 $3x+4y=5$，試求 x^2+y^2 的最小值及此時 x，y 的值.

解

由柯西不等式得 $(x^2+y^2)(3^2+4^2)\geq(3x+4y)^2$.

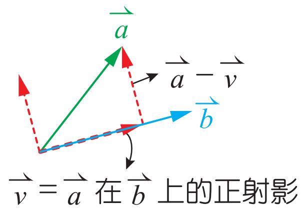
又 $3x+4y=5$，代入上式得 $(x^2+y^2)\cdot25\geq5^2$，即 $x^2+y^2\geq1$.

等號成立於 $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{4}$ 時，令 $x=3k$，$y=4k$ 代入 $3x+4y=5$，得

$9k+16k=5$，化簡得 $k=\dfrac{1}{5}$. 即當 $x=\dfrac{3}{5}$，$y=\dfrac{4}{5}$ 時，x^2+y^2 有最小值 1.

30 向量的正射影

不論是平面或空間向量，設 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 為兩個向量，且 $\vec{b}\neq\vec{0}$，則 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影為 $\left(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right)\vec{b}$.



例題

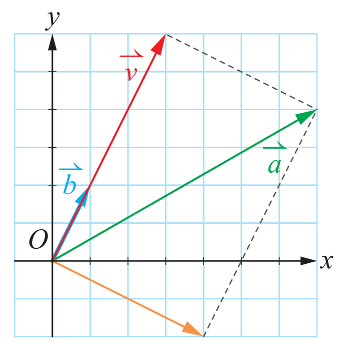
試將向量 $\vec{a}=(7,\ 4)$ 分解為與 $\vec{b}=(1,\ 2)$ 平行及垂直之兩個分量.

解

$\vec{v}=\left(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right)\vec{b}=\dfrac{7\times1+4\times2}{1^2+2^2}(1,\ 2)=(3,\ 6)$.

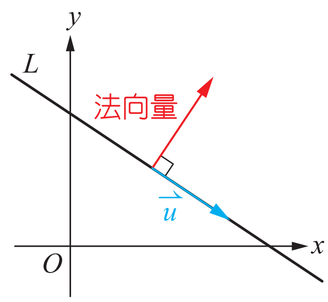
與 $\vec{b}$ 垂直之分量，即

$\vec{a}-\vec{v}=(7,\ 4)-(3,\ 6)=(4,\ -2)$.



31 直線的法向量

向量 $(a,\ b)$ 為直線 L：$ax+by+c=0$ 的一個法向量.



例題 1

已知直線 L 的法向量為 $(2,\ -3)$，且通過點 $(-1,\ 4)$，試求此直線方程式.

解

因法向量為 $(2,\ -3)$，可設直線 L 方程式為 $2x-3y=k$.

又通過點 $(-1,\ 4)$，故

$2\times(-1)-3\times4=k$,

即 $k=-14$，故直線 L 方程式為 $2x-3y+14=0$.

例題2

求二直線 $\sqrt{3}x-y+2=0$ 及 $2x+2y+7=0$ 之夾角.

解

兩直線分別取法向量 $(\sqrt{3},\ -1)$ 與 $(1,\ 1)$

$$\cos\theta=\frac{(\sqrt{3},\ -1)\cdot(1,\ 1)}{|\sqrt{3+1}\cdot\sqrt{1+1}|}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

故 $\theta=75^\circ$，因此另一夾角為 105°

32 二階行列式

二階行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc.$

33 三角形與平行四邊形的面積公式

設 $\vec{u}=(a_1,\ a_2)$ 和 $\vec{v}=(b_1,\ b_2)$ 為兩個非零向量.

(1) 由 $\vec{u}$ 和 $\vec{v}$ 所張成的三角形面積為

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2-(\vec{u}\cdot\vec{v})^2}=\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\text{的絕對值.}$$

(2) 由 $\vec{u}$ 和 $\vec{v}$ 所張成的平行四邊形面積為

$$\sqrt{|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2-(\vec{u}\cdot\vec{v})^2}=|a_1b_2-a_2b_1|=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\text{的絕對值}$$

例題

(1) 試求由 $\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(4,\ 5)$ 所張成的平行四邊形面積.

(2) 已知 $\triangle ABC$ 中三頂點坐標為 $A(2,\ 1)$，$B(1,\ -2)$，$C(4,\ -1)$，試求 $\triangle ABC$ 的面積.

解

(1) 由 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 所張成的平行四邊形面積為 $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$ 的絕對值

$=|2\times5-1\times4|=6.$

(2) 因為 $\overrightarrow{AB}=(1-2,\ -2-1)=(-1,\ -3)$，

$\overrightarrow{AC}=(4-2,\ -1-1)=(2,\ -2)$，所以 $\triangle ABC$ 的面積為

$$\frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}\text{的絕對值}\right)=\frac{1}{2}|(-1)\times(-2)-(-3)\times2|=4.$$

34 線性組合與二元一次方程組

解二元一次方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2, \end{cases}$ 即要找出實數 x, y 滿足線性組合 $x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{c}$.

例題

已知二元一次方程組 $\begin{cases} 2x+y=7 \\ x+3y=11 \end{cases}$, 將此方程組表示為向量線性組合的形式.

解

令 $\vec{a}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}$

原方程組可表示成

$x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{c}$

35 克拉瑪公式

已知二元一次方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2, \end{cases}$

設 $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $\Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$, 當 $\Delta\neq 0$ 時, 方程組恰有一組解為

$x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$, $y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$.

例題

利用克拉瑪公式, 解二元一次方程組 $\begin{cases} 9x+10y=11, \\ 11x+12y=13. \end{cases}$.

解

因為 $\Delta=\begin{vmatrix} 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 9 & 10-9 \\ 11 & 12-11 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 11 & 1 \end{vmatrix}=-2$,

$\Delta_x=\begin{vmatrix} 11 & 10 \\ 13 & 12 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 11-10 & 10 \\ 13-12 & 12 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 12 \end{vmatrix}=2$,

$\Delta_y=\begin{vmatrix} 9 & 11 \\ 11 & 13 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 9 & 11-9 \\ 11 & 13-11 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 11 & 2 \end{vmatrix}=-4$.

故由克拉瑪公式得

$x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=\dfrac{2}{-2}=-1$, $y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=\dfrac{-4}{-2}=2$.

36 克拉瑪公式的幾何意義

在線性組合 $x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{c}$ 中，若 $x, y>0$，則

$$(x, y)=\left(\frac{\vec{c},\ \vec{b}\text{ 所張成的平行四邊形面積}}{\vec{a},\ \vec{b}\text{ 所張成的平行四邊形面積}}, \frac{\vec{a},\ \vec{c}\text{ 所張成的平行四邊形面積}}{\vec{a},\ \vec{b}\text{ 所張成的平行四邊形面積}}\right).$$

例題

已知 $3\vec{a}+5\vec{b}-4\vec{c}=\vec{0}$，若 $\vec{b}, \vec{c}$ 所張成的三角形面積為 1，試求 $\vec{a}, \vec{c}$ 所張成的三角形面積.

解

由 $3\vec{a}+5\vec{b}=4\vec{c}$

得 $\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{5}{4}\vec{b}=\vec{c}$

$$\frac{3}{4}=\frac{\vec{c},\ \vec{b}\text{ 所張成的平行四邊形面積}}{\vec{a},\ \vec{b}\text{ 所張成的平行四邊形面積}}\Rightarrow \vec{a},\ \vec{b}\text{ 所張成的平行四邊形面積}=\frac{4}{3}$$

$$\frac{5}{4}=\frac{\vec{a},\ \vec{c}\text{ 所張成的平行四邊形面積}}{\vec{a},\ \vec{b}\text{ 所張成的平行四邊形面積}}$$

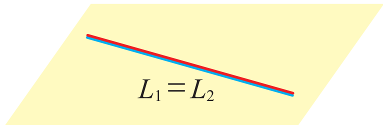
$$\Rightarrow \vec{a},\ \vec{c}\text{ 所張成的平行四邊形面積}=\frac{5}{4}\cdot\vec{a},\ \vec{b}\text{ 所張成的平行四邊形面積}$$

$$=\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{3}=\frac{5}{3}$$

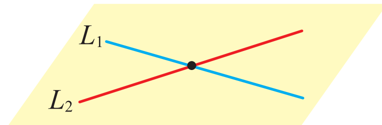
37 直線與直線的關係

空間中的兩直線 L_1 與 L_2 的位置關係有下列四種情形：

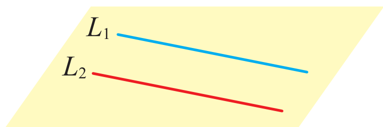
(1) 兩直線重合.



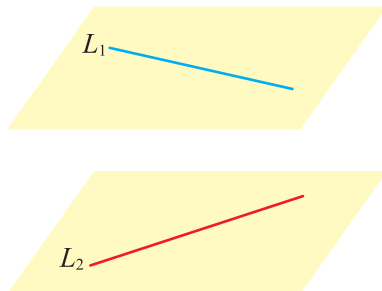
(2) 兩直線恰交於一點.



(3) 兩直線平行.

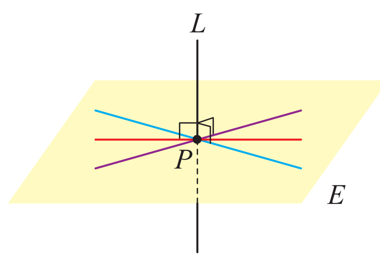


(4) 兩直線歪斜.



38 直線與平面垂直的定義

若直線 L 與平面 E 相交於一點 P，且平面 E 上通過 P 點的每一條直線都與直線 L 垂直，則稱直線 L 與平面 E 垂直，記為 $L\perp E$，此時直線 L 稱為平面 E 的一條法線.



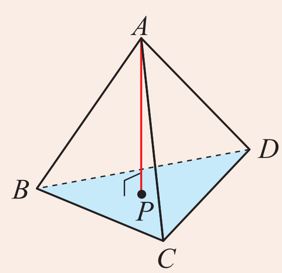
例題

右圖是一個正四面體，已知直線 AP 與平面 BCD 垂直於 P 點，試判斷下列哪些選項是正確的？

(A) 直線 AC 與平面 BCD 垂直

(B) 直線 AP 與直線 BP, CP, DP 皆垂直

(C) P 點為正三角形 BCD 的外心



解

(A) ×：若 $\overleftrightarrow{AC}\perp$ 平面 BCD，則 $\overline{AC}\perp\overline{CD}$ 且 $\overline{AC}\perp\overline{BC}$

此與 $\angle ACD=60^\circ=\angle ACB$ 相違背.

(B) ○：因 $\overline{AP}\perp$ 平面 BCD，故 $\overline{AP}\perp\overline{PB}$, $\overline{AP}\perp\overline{PC}$, $\overline{AP}\perp\overline{PD}$

(C) ○：由 (B) 知 $\angle APB=90^\circ=\angle APC=\angle APD$

又 $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}$，故 $\overline{PB}=\overline{PC}=\overline{PD}$

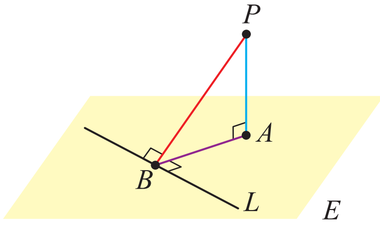
故 P 為 $\triangle BCD$ 外心.

39 三垂線定理

設直線 PA 與平面 E 垂直於 A 點，直線 L 為平面 E 上不通過 A 點的直線.

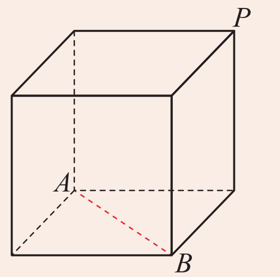
(1) 若由 A 點向直線 L 作垂線，設其垂足為 B，則直線 PB 與直線 L 垂直於 B 點，如圖所示.

(2) 反之，若直線 PB 與直線 L 垂直於 B 點，則直線 AB 與直線 L 亦垂直於 B 點.



例題

如右圖的單位正立方體，試求 P 點到 $\overline{AB}$ 的距離.



解 C 為 $\overline{AB}$ 中點，因底面 $ADBE$ 為正方形

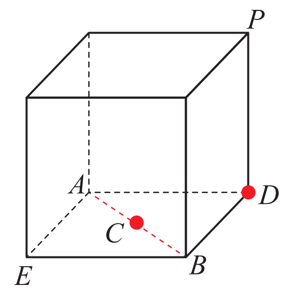
故 $\overline{AC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2}=\overline{CD}$

因 $\overline{PD}\perp$ 平面 $ADBE$，$\overline{DC}\perp\overline{AC}$

由三垂線定理知 $\overline{PC}\perp\overline{AC}$，即 $\angle PDC=90^\circ$

由直角 $\triangle PDC$，$\overline{PD}=1$，$\overline{CD}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 可得

$\overline{PC}=\sqrt{1+\dfrac{1}{2}}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

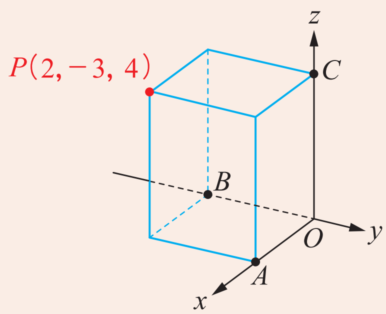


40 距離公式

坐標空間中，$P(x_1, y_1, z_1)$，$Q(x_2, y_2, z_2)$ 兩點的距離為
$\overline{PQ}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$.

例題

右圖是坐標空間中的一個長方體，P 點坐標為 $(2, -3, 4)$，試求 P 點分別到 x、y、z 軸的距離.



解

P 點到 x 軸的距離為
$\overline{PA}=\sqrt{(2-2)^2+(-3-0)^2+(4-0)^2}=5$.
P 點到 y 軸的距離為
$\overline{PB}=\sqrt{(2-0)^2+(-3+3)^2+(4-0)^2}=2\sqrt{5}$)
P 點到 z 軸的距離為
$\overline{PC}=\sqrt{(2-0)^2+(-3-0)^2+(4-4)^2}=\sqrt{13}$

41 空間向量的內積

坐標空間中兩向量 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$，$\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$ 的內積為

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

例題 1

設 $\vec{a}=(\sqrt{3}, 1, 0)$，$\vec{b}=(-1, 0, 0)$，試求：
(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 之值.　　(2) $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 兩向量的夾角.

解

(1) 由內積的定義可得
$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{3}\times(-1)+1\times0+0\times0=-\sqrt{3}$
(2) 設 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 兩向量的夾角為 θ，可得

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=-\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{3+1+0}\ \sqrt{1+0+0}}=-\frac{\sqrt{3}}{2},$$

所以 $\theta=150°$. 故 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 兩向量的夾角為 $150°$.

42 柯西不等式

(1) 向量形式：若 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 為空間中任意兩非零向量，則

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leq|\vec{a}||\vec{b}|,$$

等號成立於 $\vec{a}/\!/\vec{b}$ 或 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 兩向量中有一向量為零向量時.

(2) 一般形式：若 a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 為任意實數，則

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2,$$

等號成立於存在一實數 t 使得 $(a_1, a_2, a_3)=t(b_1, b_2, b_3)$ 或 $b_1=b_2=b_3=0$ 時.

例題 1

(1) 已知坐標空間中有兩向量 $\vec{a}=(2, 4, -4)$, $\vec{b}=(x, y, z)$, 若 $|\vec{b}|=4$, 則 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 的最大可能範圍為何？

(2) 設實數 x, y, z 滿足 $x^2+y^2+z^2=16$, 已知 c 為常數且 $(x+2y+cz)^2$ 的最大值為 144, 試求 c 值.

解

(1) 因 $|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leq|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=\sqrt{4+16+16}\cdot 4=24$

故 $-24\leq\vec{a}\cdot\vec{b}\leq 24$

(2) 因 $(x+2y+cz)^2\leq(x^2+y^2+z^2)\cdot(1^2+2^2+c^2)$

知 $x+2y+cz$ 最大值為 $16\cdot(1^2+2^2+c^2)$

故 $16(1^2+2^2+c^2)=144$ 解得 $c^2=4$

即 $c=\pm 2$

43 空間向量的外積

設 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$ 為坐標空間中兩向量，則 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的外積為向量 $(a_2b_3-a_3b_2, a_3b_1-a_1b_3, a_1b_2-a_2b_1)$, 記作 $\vec{a}\times\vec{b}$.

例題

設 $\vec{a}=(2, 1, 0)$, $\vec{b}=(1, 2, 0)$, 試求：

(1) $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的外積 $\vec{a}\times\vec{b}$.

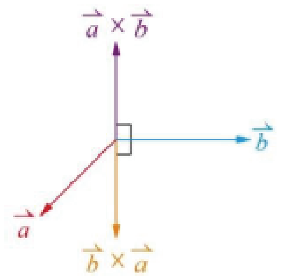
(2) $\vec{b}$ 與 $\vec{a}$ 的外積 $\vec{b}\times\vec{a}$.

解

(1) $\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}0 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\right)=(0, 0, 3)$.

(2) $\vec{b}\times\vec{a}=\left(\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}\right)=(0, 0, -3)$.

(注意到 $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$)



44 空間向量外積的基本性質

設 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$，$\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$ 為空間中兩非零向量，則:

(1) $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$.

(2) $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 平行時，$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.

(3) $\vec{a}\times\vec{b}$ 同時與 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 垂直.

(4) $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$，其中 θ 為 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夾角.

例題 1

已知坐標空間中三點 $A(1, 1, 1)$，$B(2, 0, 0)$，$C(2, -1, -1)$，試求一單位向量，使其同時與 $\overrightarrow{AB}$ 及 $\overrightarrow{AC}$ 垂直.

解

$\overrightarrow{AB}=(1, -1, -1)$，$\overrightarrow{AC}=(1, -2, -2)$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left(\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -2 & -2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-1 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & -2\end{vmatrix}\right)=(0, 1, -1)$$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ 同時垂直 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$

故 $\pm\dfrac{1}{\sqrt{0+1+1}}(0, 1, -1)=\pm\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 為所求向量.

例題 2

已知空間中 $\triangle ABC$ 三頂點坐標分別為 $A(0, 1, 2)$，$B(-2, 3, 5)$，$C(1, 4, -1)$，試求 $\triangle ABC$ 的面積.

解

$\triangle ABC$ 的面積為 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 所張成的平行四邊形面積之半，即 $\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$.

由 $\overrightarrow{AB}=(-2, 2, 3)$，$\overrightarrow{AC}=(1, 3, -3)$，可得

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left(\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & -3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}3 & -2\\ -3 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-2 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}\right)=(-15, -3, -8).$$

故 $\triangle ABC$ 的面積為 $\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{(-15)^2+(-3)^2+(-8)^2}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{298}$ 平方單位.

45 三階行列式

下列等式中的左式稱為三階行列式，右式為此三階行列式的值（或展開式）.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1.$$

例題

試求下列三階行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 6 & -8 \\ 3 & -4 & 7 \end{vmatrix}$.　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 1 & -\sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{3} \end{vmatrix}$.

解

(1) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 6 & -8 \\ 3 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 1\times6\times7+4\times(-4)\times2+3\times(-8)\times(-1)-3\times6\times2-(-4)(-8)\times1-7\times4\times(-1)$

$= -6.$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 1 & -\sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{3} \end{vmatrix} = 1\times\begin{vmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} \end{vmatrix} - 1\times\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} \end{vmatrix} + 1\times\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} \end{vmatrix}$

$= 0 - 1\times(-2\sqrt{6}) + 1\times(2\sqrt{6}) = 4\sqrt{6}.$

46 平行六面體體積

由 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$，$\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$，$\vec{c}=(c_1, c_2, c_3)$ 三個不共平面的非零向量所決定的平行六面體體積為

$$|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{的絕對值.}$$

例題 1

設 $\vec{a}=(2, 1, 3)$，$\vec{b}=(1, 2, 1)$，$\vec{c}=(-1, 3, 2)$，試求 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 三向量所決定的平行六面體體積.

解 利用上述公式得平行六面體體積

$$|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|=\begin{vmatrix}2&1&3\\1&2&1\\-1&3&2\end{vmatrix}\text{ 的絕對值}$$

$$=|2\times2\times2+1\times1\times(-1)+3\times1\times3-(-1)\times2\times3-3\times1\times2-2\times1\times1|$$

$=14$ 立方單位.

例題 2

已知坐標空間中 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 三向量所決定的平行六面體體積為 5, 試求由 $2\vec{a}, \vec{a}+\vec{b}, 3\vec{c}-\vec{a}$ 三向量所決定的平行六面體體積為何?

解 $2\vec{a}\cdot((\vec{a}+\vec{b})\times(3\vec{c}-\vec{a}))=2\vec{a}\cdot(\underbrace{(\vec{a}\times3\vec{c})}_{\vec{a}_1}-\underbrace{(\vec{a}\times\vec{a})}_{\vec{a}_2}+(\vec{b}\times3\vec{c})+\underbrace{\vec{b}\times(-\vec{a})}_{\vec{a}_3})$

因為 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ 皆垂直 $\vec{a}$, 因此 $\vec{a}\cdot\vec{a}_1=0=\vec{a}\cdot\vec{a}_2=\vec{a}\cdot\vec{a}_3$

故 $2\vec{a}\cdot((\vec{a}+\vec{b})\times(3\vec{c}-\vec{a}))=2\vec{a}\cdot(\vec{b}\times3\vec{c})=6\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 三向量所決定的平行六面體體積 $=|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|=5$

故 $2\vec{a}, \vec{a}+\vec{b}, 3\vec{c}-\vec{a}$ 三向量所決定的平行六面體體積 $=6|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|=30$

47 平面方程式

若 $\overrightarrow{n}=(a,\ b,\ c)$ 為平面 E 的一個法向量，且 $A(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 為平面 E 上的一個點，則平面 E 的方程式為

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)c=0.$$

例題 1

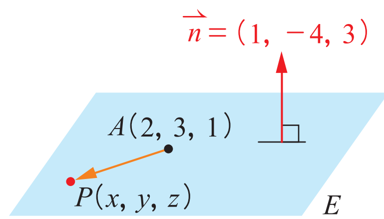
試求通過點 $A(2,\ 3,\ 1)$，且以 $\overrightarrow{n}=(1,\ -4,\ 3)$ 為法向量的平面方程式.

解

如圖所示，得平面方程式

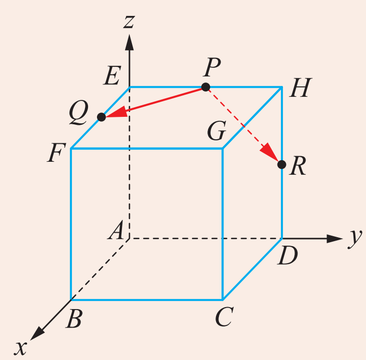
$1(x-2)+(-4)(y-3)+3(z-1)=0$,

整理得 $x-4y+3z+7=0$.



例題 2

邊長為 2 的正立方體 $ABCD-EFGH$，設 A 為坐標空間的原點 $(0,\ 0,\ 0)$，P、Q、R 分別為 $\overline{EH}$、$\overline{EF}$、$\overline{HD}$ 的中點，試求平面 PQR 的方程式.



解

設 A 為原點，則 P、Q、R 三點坐標分別為 $P(0,\ 1,\ 2)$、$Q(1,\ 0,\ 2)$、$R(0,\ 2,\ 1)$，

所以 $\overrightarrow{PQ}=(1,\ -1,\ 0)$，$\overrightarrow{PR}=(0,\ 1,\ -1)$，

可求得 $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=(1,\ 1,\ 1)$.

因為 $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}$ 為平面 PQR 的一個法向量，所以平面 PQR 的方程式為

$1(x-0)+1(y-1)+1(z-2)=0$,

整理得 $x+y+z-3=0$.

48 兩平面的夾角

設平面 E_1、E_2 的法向量分別為 $\vec{n_1}$、$\vec{n_2}$. 若 $\vec{n_1}$ 與 $\vec{n_2}$ 的夾角為 θ, 則平面 E_1 與 E_2 的夾角為 θ 與 $180°-\theta$, 其中 $\cos\theta=\pm\dfrac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}$.

例題

試求兩平面 E_1: $2x+y+2z=0$ 與 E_2: $x+y=0$ 的夾角.

解

分別取 E_1, E_2 法向量 $\vec{n_1}=(2, 1, 2)$, $\vec{n_2}$ $(1, 1, 0)$

計算 $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$ 夾角 θ,

$$\cos\theta=\pm\frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}=\pm\frac{3}{3\cdot\sqrt{2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

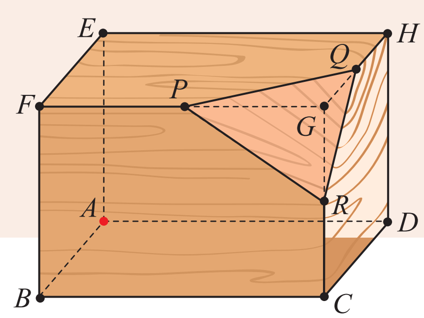
故一夾角 45°及一夾角 135°.

49 點到平面的距離公式

坐標空間中, 點 $P(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 E: $ax+by+cz+d=0$ 的距離為 $\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

例題

有一長方體木塊如右圖所示, 其長、寬、高分別為 $\overline{AD}=60$ 公分、$\overline{AB}=20$ 公分、$\overline{AE}=40$ 公分. 設 P、Q、R 分別為 $\overline{GF}$、$\overline{GH}$、$\overline{GC}$ 的中點, 現沿著平面 PQR 截下一個三角錐木塊求 A 點到平面 PQR 的距離.



解

令 $G(0, 0, 0)$, $P(30, 0, 0)$, $Q(0, 10, 0)$, $R(0, 0, 20)$

則 $A(60, 20, 40)$

平面 PQR 方程式為 $\dfrac{x}{30}+\dfrac{y}{10}+\dfrac{z}{20}=1$

計算點 A 到平面 PQR 距離

$$d=\frac{\left|\frac{60}{30}+\frac{20}{10}+\frac{40}{20}-1\right|}{\sqrt{\frac{1}{30^2}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{20^2}}}=\frac{5}{\frac{1}{10}\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{1}+\frac{1}{4}}}=\frac{50}{\frac{7}{6}}=\frac{300}{7}\text{（公分）}.$$

50 兩平行平面的距離

兩平行平面 E_1: $ax+by+cz+d_1=0$, E_2: $ax+by+cz+d_2=0$ 的距離為 $\dfrac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

例題

(1) 試求兩平行平面 E_1: $x+2y+2z+9=0$ 與 E_2: $x+2y+2z-6=0$ 的距離.

(2) 已知平面 E 與平面 F: $2x-y-2z+3=0$ 平行，且平面 E 與 F 的距離為 2，試求平面 E 的方程式.

解

(1) 兩平行平面的距離公式，得 $\dfrac{|9-(-6)|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\dfrac{15}{3}=5$.

(2) 因為平面 E 與平面 F 平行，可設平面 E 的方程式為
$2x-y-2z+d=0$，因為平面 E 與 F 的距離為 2，故
$\dfrac{|d-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}=2$,
解得 $d=-3$ 或 9，因此．平面 E 的方程式為 $2x-y-2z-3=0$ 或 $2x-y-2z+9=0$.

51 直線的參數式

設直線 L 通過點 $A(x_0, y_0, z_0)$，且與非零向量 $\vec{v}=(a, b, c)$ 平行，則直線 L 的參數式為

$$\begin{cases} x=x_0+at, \\ y=y_0+bt, \quad t \text{ 為實數}, \\ z=z_0+ct, \end{cases}$$

其中 t 稱為參數，$\vec{v}$ 稱為直線 L 的方向向量.

例題

試求通過點 $A(2, -3, 4)$，且與向量 $\vec{v}=(4, 2, -1)$ 平行的直線 L 的參數式.

解

通過點 $A(2, -3, 4)$，且與向量 $\vec{v}=(4, 2, -1)$ 平行的直線 L 的參數式為

$$\begin{cases} x=2+4t \\ y=-3+2t \text{ ; } t \text{ 為實數}. \\ z=4-t \end{cases}$$

52 直線的比例式

設直線 L 通過點 $A(x_0, y_0, z_0)$，且與向量 $\vec{v}=(a, b, c)$ 平行，其中 a, b, c 皆不為 0，則直線 L 的比例式為 $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$.

例題

設直線 L 通過點 $A(-1, 2, 3)$，$B(4, 1, 5)$ 兩點，試求直線 L 的比例式.

解 $\overrightarrow{AB}=(4-(-1), 1-2, 5-3)=(5, -1, 2)$，因為直線 L 通過點 $A(-1, 2, 3)$，且 $\overrightarrow{AB}$ 是直線 L 的一個方向向量，所以直線 L 的比例式為

$$\frac{x+1}{5}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{2}.$$

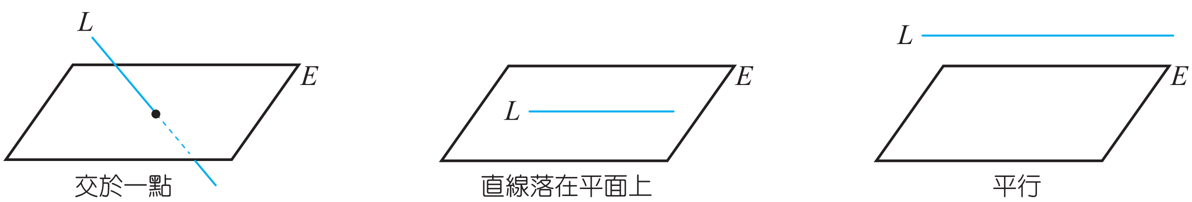
又直線 L 也通過點 $B(4, 1, 5)$，故直線 L 的比例式亦可寫成

$$\frac{x-4}{5}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-5}{2}.$$

（隨著直線上通過的點以及方向向量選取的不同，L 會有很多不同的比例式）

53 直線與平面的關係

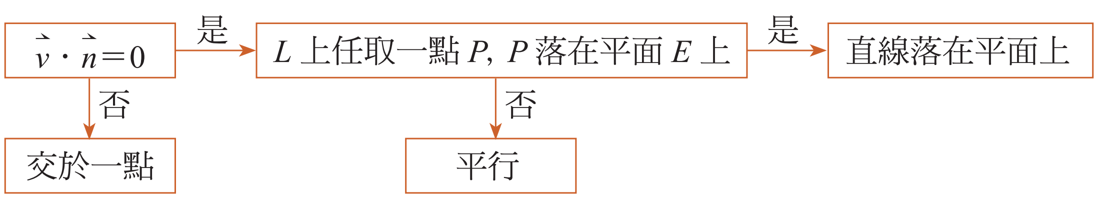
坐標空間中一條直線 L 與一個平面 E 的關係，可以出現下列三種情形：



可以經由以下程序判斷：若直線 L－方向向量 $\vec{v}$，平面 E－法向量 $\vec{n}$

(1) $\vec{v}$ 是否與 $\vec{n}$ 垂直.

(2) 若 $\vec{v}\perp\vec{n}$，L 上任取一點是否在平面上.

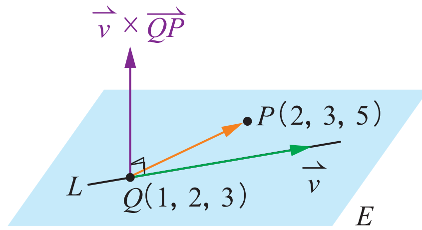


例題 1

已知平面 E 包含點 $P(2, 3, 5)$ 與直線 L: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{2}$, 試求平面 E 的方程式.

解

由直線 L 的比例式 $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{2}$ 知點 $Q(1, 2, 3)$
為直線 L 上一點, $\vec{v}=(2, 3, 2)$ 為直線 L 的一個方向向量,
又 $\overrightarrow{QP}=(1, 1, 2)$ 為平面 E 上的一個向量,
因此, $\vec{v}\times\overrightarrow{QP}$ 是平面 E 的一個法向量, 如圖所示.



$\vec{v}\times\overrightarrow{QP}=\left(\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right)=(4, -2, -1)$,
平面 E 的方程式為 $4(x-2)-2(y-3)-1(z-5)=0$, 即 $4x-2y-z+3=0$.

例題 2

試求點 $P(2, 3, 1)$ 對平面 E: $3x+2y+z=1$ 的投影點.

解

記所求投影點為 Q, 則 $\overleftrightarrow{PQ}\perp$ 平面 E, 因此
E 的法向量為 $\overleftrightarrow{PQ}$ 的的一方向向量

令 $\overleftrightarrow{PA}$: $\begin{cases} x=2+3t, \\ y=3+2t, & t \text{ 為實數} \\ z=1+t, \end{cases}$

可設 $Q(2+3t, 3+2t, 1+t)$, Q 在平面 E 上, 故
$3(2+3t)+2(3+2t)+(1+t)=1$, 解得
$t=\frac{-6}{7}$ 代回求得 $Q\left(\frac{-4}{7}, \frac{9}{7}, \frac{1}{7}\right)$.

54 二直線關係的判斷

空間中兩直線 L_1 與 L_2 其方向向量分別為 $\overrightarrow{v_1}$ 與 $\overrightarrow{v_2}$，當 $\overrightarrow{v_1}$ 與 $\overrightarrow{v_2}$ 不平行時，兩直線可能相交於一點，或歪斜．當 $\overrightarrow{v_1}$ 與 $\overrightarrow{v_2}$ 平行時，兩直線可能平行或重合．

可依下列程序判定：

1. 先檢查是否平行（即：檢查方向向量是否平行）．
2. 再檢查是否相交（利用參數式）．
3. 若既不平行，亦不相交，則兩直線為歪斜線．

例題 1

判斷下列兩直線的關係：

(1) L_1：$\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{2}$ 與 L_2：$\dfrac{x-6}{-1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-6}{-2}$．

(2) L_1：$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z+1}{-1}$ 與 L_2：$\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{2}$．

解 (1) 將 L_1、L_2 寫成參數式

$$L_1：\begin{cases} x=3+t, \\ y=-1-2t, \\ z=0+2t, \end{cases} t \text{ 為實數}，L_2：\begin{cases} x=6-s, \\ y=-1-s, \\ z=6-2s, \end{cases} s \text{ 為實數}.$$

解

$$\begin{cases} 3+t=6-s & ① \\ -1-2t=-1-s & ② \\ 2t=6-2s & ③ \end{cases}$$

由①、②解得 $t=1$，$s=2$，代回③式亦成立．故兩直線交於一點 P，

P 點坐標可用 L_1 代 $t=1$（或 L_2 代 $s=2$）求出，得 $P(4, -3, 2)$．

(2) 將 L_1、L_2 寫成參數式

$$L_1：\begin{cases} x=1+2t, \\ y=-1+3t, \\ z=-1-t, \end{cases} t \text{ 為實數}，L_2：\begin{cases} x=0-2s, \\ y=2+s, \\ z=3+2s, \end{cases} s \text{ 為實數}.$$

解

$$\begin{cases} 1+2t=0-2s & ④ \\ -1+3t=2+s & ⑤ \\ -1-t=3+2s & ⑥ \end{cases}$$

由④、⑤解得 $t=\dfrac{5}{8}$，$s=-\dfrac{9}{8}$，但代回⑥式不合，表示並沒有一組 t、s 使得兩直線有共同交點，又此兩直線方向向量不平行，故兩直線歪斜．

例題 2

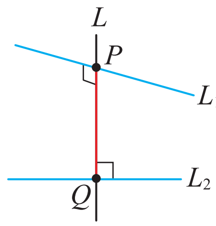
已知直線 L_1: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ 與 L_2: $\dfrac{x-8}{6}=\dfrac{y-7}{2}=\dfrac{z-2}{-3}$ 互為歪斜線，試求：

(1) 直線 L_1 與 L_2 的距離.

(2) 公垂線 L 的比例式.

解

(1) 設公垂線 L 分別與直線 L_1、L_2 相交於 P、Q 兩點，如圖所示. 由直線 L_1 與 L_2 的比例式，可令 P 點坐標為 $P(1+t,\ 2+t,\ 1-t)$，t 為實數，Q 點坐標為 $Q(8+6s,\ 7+2s,\ 2-3s)$，s 為實數，得



$$\overrightarrow{PQ}=(6s-t+7,\ 2s-t+5,\ -3s+t+1).$$

因為 $\overrightarrow{PQ}$ 與直線 L_1, L_2 的方向向量 $(1,\ 1,\ -1)$，$(6,\ 2,\ -3)$ 均垂直，所以

$$\begin{cases}(1,\ 1,\ -1)\cdot(6s-t+7,\ 2s-t+5,\ -3s+t+1)=0,\\(6,\ 2,\ -3)\cdot(6s-t+7,\ 2s-t+5,\ -3s+t+1)=0,\end{cases}$$

即 $\begin{cases}11s-3t+11=0\\49s-11t+49=0\end{cases}$ 解得 $t=0$, $s=-1$.

因此 P 點坐標為 $(1,\ 2,\ 1)$，Q 點坐標為 $(2,\ 5,\ 5)$，得公垂線段長

$$\overline{PQ}=\sqrt{(2-1)^2+(5-2)^2+(5-1)^2}=\sqrt{26},$$

此即直線 L_1 與 L_2 的距離.

(2) $\overrightarrow{PQ}=(1,\ 3,\ 4)$ 為公垂線 L 的一個方向向量，且公垂線 L 通過點 $P(1,\ 2,\ 1)$，故得公垂線 L 的比例式為 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-1}{4}$.

55 高斯消去法與矩陣的列運算

1. 高斯消去法的求解過程，每一步驟都是下列三種操作之一：
   (1) 將某兩個方程式對調.
   (2) 將某個方程式乘上一個不為 0 的常數.
   (3) 將某個方程式乘上一個不為 0 的常數後，再加到另一個方程式.
2. 矩陣的列運算
   解線性方程組時對應的增廣矩陣其各列操作有下列三種形式：
   (1) 將某兩列對調.
   (2) 將某一列乘上一個不為 0 的常數.
   (3) 將某一列乘上一個不為 0 的常數後，再加到另一列.
   這三個操作稱為矩陣的列運算．矩陣列運算操作前後的增廣矩陣所對應的線性方程組的解是完全相同的．下例來說明過程.

高斯消去法	矩陣列運算
$\begin{cases} 2x+3y-z=-1, & ① \\ x+y+z=2, & ② \\ 3x-y+2z=13. & ③ \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 13 \end{bmatrix}$
(1) 將①式與②式對調，得	
$\begin{cases} x+y+z=2, & ④ \\ 2x+3y-z=-1, & ⑤ \\ 3x-y+2z=13. & ⑥ \end{cases}$	$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 13 \end{bmatrix} \begin{matrix} \times(-2) & \times(-3) \end{matrix}$
(2) ④×（−2）+⑤，④×（−3）+⑥，得	
$\begin{cases} x+y+z=2, & ⑦ \\ y-3z=-5, & ⑧ \\ -4y-z=7. & ⑨ \end{cases}$	$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & -4 & -1 & 7 \end{bmatrix} \times 4$
(3) ⑧×4+⑨，得	
$\begin{cases} x+y+z=2, & ⑩ \\ y-3z=-5, & ⑪ \\ -13z=-13. & ⑫ \end{cases}$	$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -13 & -13 \end{bmatrix} \times \left(-\dfrac{1}{13}\right)$
(4) ⑫ $\times \left(-\dfrac{1}{13}\right)$，得	
$\begin{cases} x+y+z=2, & ⑬ \\ y-3z=-5, & ⑭ \\ z=1. & ⑮ \end{cases}$	$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，

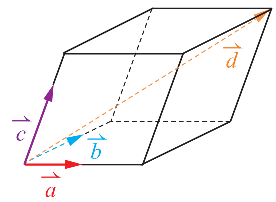
故線性方程組的解為 $x=3$，$y=-2$，$z=1$.

56 線性組合的幾何意義

當坐標空間中非零向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 不在同一平面上時，則任一空間向量 $\vec{d}$ 必可表示成 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 的線性組合

$$\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c},$$

且這個表示法是唯一的.



例題

給定坐標空間中四個向量 $\vec{a}=(1,\ 1,\ 2)$, $\vec{b}=(1,\ 2,\ 1)$, $\vec{c}=(3,\ 4,\ 5)$, $\vec{d}=(5,\ 7,\ 8)$, 試問 $\vec{d}$ 是否可表示成 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 的線性組合？如果可以，其表示方法是否唯一？

解 $\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$

即 $x\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\7\\8\end{pmatrix}$

得 $x+y+3z=5$

$x+2y+4z=7$

$2x+y+5z=8$

解得 $\begin{cases}x=3-2t,\\ y=2-t, & t \text{ 為實數,}\\ z=t,\end{cases}$

有無限多解故 $\vec{d}$ 可表示成無限多組 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 的線性組合.

57 矩陣的定義

設 m, n 為正整數，形如

$$\begin{array}{cc} & \text{第 } j \text{ 行}\downarrow \\ \text{第 } i \text{ 列}\rightarrow & \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\end{array}$$

的矩形陣列稱為 $m\times n$ 階矩陣，以 $[a_{ij}]_{m\times n}$ 表示．此矩陣有 m 列，n 行，其中 a_{ij} 為第 i 列與第 j 行交叉位置上的元，稱為矩陣的第 $(i,\ j)$ 元.

58 矩陣加法、減法與係數積的定義

1. 設 A, B 都是 $m\times n$ 階的矩陣, 且

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}, \text{則}$$

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix},$$

即將相同位置的元相加. 也就是若 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{m\times n}$, 則 $A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$.

2. 矩陣減法的定義

設 A, B 都是 $m\times n$ 階的矩陣, 則定義 A 與 B 的差為 $A-B=A+(-B)$. 即 A 中的每一個元減去 B 中相同位置上的元.

也就是若 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{m\times n}$, 則 $A-B=[a_{ij}-b_{ij}]_{m\times n}$.

3. 矩陣的係數積

即若 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, 則 $rA=[ra_{ij}]_{m\times n}$.

59 矩陣的係數積具有以下的性質

(1) $r(A+B)=rA+rB$.

(2) $(r+s)A=rA+sA$.

(3) $(rs)A=r(sA)$.

(4) $0A=O$. （等號左邊表示乘上 0, 等號右邊是零矩陣）

(5) $(-1)A=-A$.

例題

已知矩陣 $A=\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 10 & 20 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$, 且 $X+3B=2A$, 試求矩陣 X.

解 將等號兩邊同時減去 $3B$, 得 $X=2A-3B$, 故

$$X=2\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 10 & 20 \end{bmatrix}-3\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 16 & 4 \\ 20 & 40 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 18 & 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 & -8 \\ 2 & 34 \end{bmatrix}.$$

60 矩陣乘法的定義

設 A 是一個 $m\times n$ 階矩陣，$A=[a_{ij}]_{m\times n}$，B 是一個 $n\times p$ 階矩陣，$B=[b_{ij}]_{n\times p}$，則 $C=AB$ 是一個 $m\times p$ 階矩陣，$C=[C_{ij}]_{m\times p}$，其中 $C_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$，即

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{第 } i \text{ 列} \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \cdot \begin{array}{c} \text{第 } j \text{ 行} \\ \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}_{n\times p} \end{array} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{ip} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}_{m\times p}$$

$$A \qquad\qquad B \qquad = \qquad C$$

在前面的定義中，注意到 A, B 兩個矩陣相乘時，矩陣 A 的行數必須要等於矩陣 B 的列數，AB 才有意義，而且

$$A_{m\times \underbrace{n}_{}}B_{\underbrace{n}_{\text{相等}}\times p}=C_{m\times p}.$$

(1) 矩陣的乘法不一定可以交換，即 AB 與 BA 不一定相等．例如：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(2) 若 $AB=O$，不一定 A, B 至少有一個為零矩陣．例如：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(3) 若 $AB=AC$，不一定 $B=C$．例如：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

例題

已知矩陣 $A=\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$，

(1) 試求 AB.

(2) 判斷 BA 是否有意義.

解 (1) 因為矩陣 A 是 2×3 階矩陣，矩陣 B 是 3×4 階矩陣，所以乘積 AB 是 2×4 階矩陣，如下：

$$AB=\begin{bmatrix}5&4&2\\1&3&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-1&0&1\\1&0&1&3\\4&3&2&5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}5\times3+4\times1+2\times4 & 5\times(-1)+4\times0+2\times3 & 5\times0+4\times1+2\times2 & 5\times1+4\times3+2\times5\\1\times3+3\times1+6\times4 & 1\times(-1)+3\times0+6\times3 & 1\times0+3\times1+6\times2 & 1\times1+3\times3+6\times5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}27&1&8&27\\30&17&15&40\end{bmatrix}.$$

(2) 因為矩陣 B 是 3×4 階矩陣，矩陣 A 是 2×3 階矩陣，B 的行數 4 不等於 A 的列數 2，所以 BA 沒有意義.

例：矩陣 $I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，$I_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$分別稱為 2×2 及 3×3 的單位矩陣.

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-5\\2&7\\3&19\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-5\\2&7\\3&19\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}2&-1&2\\5&6&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&6&7\end{bmatrix}$$

事實上，任何單位方陣 I_n 都滿足：

(1)若 A 是 $m\times n$ 階矩陣，則 $AI_n=A$，$I_mA=A$.

(2) 若 A 是 $n\times n$ 階矩陣，則 $AI_n=I_nA=A$.

61 乘法反方陣

1. 設 A 是一個 n 階方陣，若存在 n 階方陣 B 滿足 $AB=BA=I_n$，則稱 B 是 A 的乘法反方陣，以符號 A^{-1} 表示.
2. 二階乘法反方陣的公式

   若二階方陣 $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$的行列式 $\det A\neq0$，則 A 有乘法反方陣 A^{-1}，

   且 $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}=\dfrac{1}{\det A}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$.

   若 $\det A=0$，則 A 沒有乘法反方陣.

例題

已知二階方陣 $A=\begin{bmatrix}2&3\\4&5\end{bmatrix}$，則：

(1) A 是否有乘法反方陣（即 A^{-1} 是否存在）？

(2) 若 A^{-1} 存在，試求 A^{-1}.

解

(1) $\det A=\begin{vmatrix}2&3\\4&5\end{vmatrix}=-2\neq 0$，故 A^{-1} 存在.

(2) 由乘法反方陣的公式得

$$A^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}5&-3\\-4&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{5}{2}&\frac{3}{2}\\2&-1\end{bmatrix}.$$

62 2 階轉移矩陣

2 階方陣 $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}$若滿足

(1) 每一元 $a_{ij}\geq 0$

(2) $a_{11}+a_{21}=1=a_{12}+a_{22}$ （即每一行的各元之和都為 1）.

則稱 A 是一個 2 階的轉移矩陣.

例題

設某城市其市區及郊區人口遷移狀況如下：每年住在市區的人有 90%留在市區，有 10 %流向郊區；而郊區的人有 80%留在郊區，有 20 %流向市區. 已知市區與郊區目前的人口比例分別為 75 %與 25 %，如果將初始市區與郊區人口比例用 2×1 階的機率向量 X_0 表示為

$X_0=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}0.75\\0.25\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\text{市區}\\\text{郊區}\end{array}$，則：

(1) 試寫出該城市人口遷移的轉移矩陣 A.

(2) 試求一年後的人口比例矩陣 X_1.

解

(1)該城市人口的轉移矩陣為 $A=\begin{array}{cc}\begin{array}{cc}\text{市區}&\text{郊區}\end{array}&\\\begin{bmatrix}0.9&0.2\\0.1&0.8\end{bmatrix}&\begin{array}{l}\text{市區}\\\text{郊區}\end{array}\end{array}$.

(2) 一年後的人口比例矩陣為 $X_1=AX_0=\begin{bmatrix}0.9&0.2\\0.1&0.8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.75\\0.25\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.725\\0.275\end{bmatrix}$.

63 平面上的線性變換

任何一個二階方陣 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 都定義了一個坐標平面上的線性變換，將點 $P(x,\ y)$ 變換到點 $P'(X,\ Y)$，其中 $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}$.

例題 1

設 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ 所定義的線性變換把點 $R(4,\ 5)$ 變換到 R' 點，試求 R' 點坐標.

解

R' 點坐標為 $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 13 \\ 19 \end{bmatrix}$. 因此點 $R'(13,\ 19)$.

例題 2

設 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ 所定義的線性變換將點 S 變換到點 $S'(3,\ 5)$，試求 S 點坐標.

解

由 $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ 可得

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{7}{5} \end{bmatrix}.$$

因此 S 點坐標為 $\left(\frac{4}{5},\ \frac{7}{5}\right)$.

64 線性變換的面積比

令 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，$S_1$ 為平面上的一個平行四邊形．設 S_1 經由 A 所定義的線性變換變成 S_2，則
$\dfrac{S_2\text{ 的面積}}{S_1\text{ 的面積}}=|\det A|$．

例題

設 O, P, Q 三點坐標為 $O(0, 0)$，$P(3, 2)$，$Q(1, 5)$．若 O、P、Q 三點經過矩陣 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ 線性變換後，得到新的三點 O'、P'、Q'，試求 $\overrightarrow{O'P'}$ 與 $\overrightarrow{O'Q'}$ 所張成的平行四邊形面積．

解

因為 $\overrightarrow{OP}=(3, 2)$，$\overrightarrow{OQ}=(1, 5)$，故由 $\overrightarrow{OP}$ 與 $\overrightarrow{OQ}$ 所張成的平行四邊形面積為 $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ 的絕對值 $=|3\times5-1\times2|=13$．

因，$|\det A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ 的絕對值 $=|2\times3-1\times4|=2$，
故由 $\overrightarrow{O'P'}$ 與 $\overrightarrow{O'Q'}$ 所張成的平行四邊形面積為由 $\overrightarrow{OP}$ 與 $\overrightarrow{OQ}$ 所張成的平行四邊形面積的 2 倍，即 $2\times13=26$ 平方單位．

65 伸縮矩陣、伸縮變換

$\begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$，$h\neq0$，$k\neq0$ 的矩陣稱為伸縮矩陣，其定義的線性變換為伸縮變換，此變換的作用為分別將 x、y 坐標伸縮為 h、k 倍．

例題

試描述線性變換 $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ 的作用：

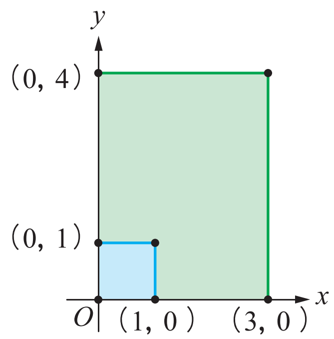
解

觀察 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 及 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 經變換後的向量

$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

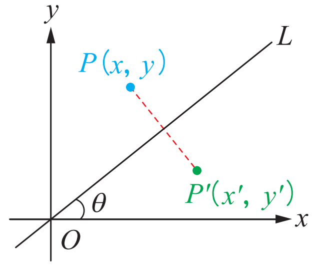
知此變換為分別將 x、y 坐標伸縮為 3、4 倍．



66 鏡射矩陣、鏡射變換

一般而言，若直線 L 通過原點且斜角為 θ，則 L 的鏡射變換可寫成

$\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$.



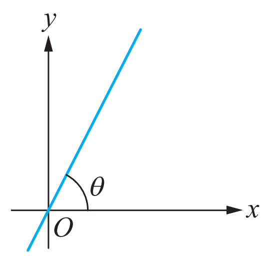
例題

(1) 已知直線 L：$y=2x$，二階方陣 A 所定義的線性變換為“對直線 L 作鏡射”，試求二階方陣 A.

(2) 已知直線 L：$y=mx$，二階方陣 A 所定義的線性變換為“對直線 L 作鏡射”，試求二階方陣 A.

解

(1) 直線 $y=2x$ 的斜角 θ



則 $\tan\theta=2$ 可得 $\sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

因此 $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=-\dfrac{3}{5}$，$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{4}{5}$

故鏡射變換矩陣為 $\begin{bmatrix} -\dfrac{3}{5} & \dfrac{4}{5} \\ \dfrac{4}{5} & \dfrac{3}{5} \end{bmatrix}$.

(2) 直線 $y=mx$ 的斜角中，則 $\tan\theta=m$ 可得 $\sin\theta=\dfrac{m}{\sqrt{1+m^2}}$，$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}}$

因此 $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=\dfrac{1-m^2}{1+m^2}$，$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{2m}{1+m^2}$

故鏡射變換矩陣為 $\begin{bmatrix} \dfrac{1-m^2}{1+m^2} & \dfrac{2m}{1+m^2} \\ \dfrac{2m}{1+m^2} & -\dfrac{1-m^2}{1+m^2} \end{bmatrix}$.

67 旋轉矩陣、旋轉變換

形如$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$的矩陣稱為旋轉矩陣，其定義的線性變換稱為旋轉變換，此變換的作用為“以原點為中心旋轉 θ 角”．

例如

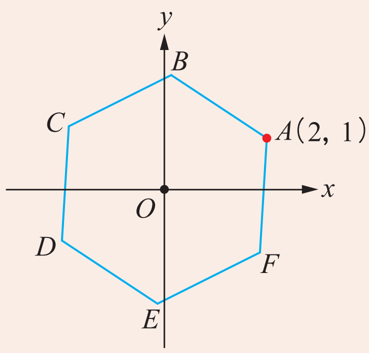
$\begin{bmatrix}\cos 45^\circ & -\sin 45^\circ\\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ\end{bmatrix}$為旋轉 45° 的變換矩陣

$\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$為旋轉 90° 的變換矩陣

$\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$為旋轉 60° 的變換矩陣

例題

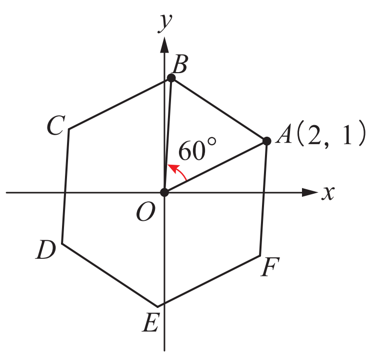
如右圖，有一個正六邊形 $ABCDEF$ 以原點 O 為中心，$A(2,\ 1)$ 為其中一個頂點，試求此正六邊形頂點 B 的坐標．



解

如右圖，O 為坐標原點，把點 A 旋轉 60° 即可求得 B 的坐標．故頂點 B 的坐標為

$$\begin{bmatrix}\cos 60^\circ & -\sin 60^\circ\\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sqrt{3}+\frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$



68 推移矩陣、推移變換

設 k 為實數，則：

(1) 形如$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$的矩陣稱為 x 方向的推移矩陣，其定義的線性變換為“往 x 方向推移 y 坐標 k 倍”的推移變換.

(2) 形如$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$的矩陣稱為 y 方向的推移矩陣，其定義的線性變換為“往 y 方向推移 x 坐標 k 倍”的推移變換.

例題

試描述線性變換$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$的作用.

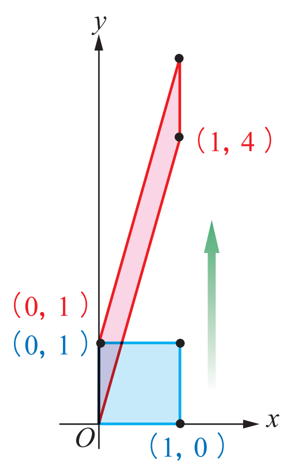
解

觀察觀察$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$及$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$經變換後的向量經變換後的向量

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

知此變換為“往 y 坐標推移 x 坐標 4 倍”.



69 條件機率

設 A, B 為樣本空間 S 中的兩事件，且 $P(A)>0$．則在事件 A 發生的條件下，事件 B 發生的條件機率為 $P(B|A)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$.

例題

調查某校高一學生擁有手機以及平板電腦的情形，當中擁有手機又擁有平板電腦的比例占全部學生的 60 %，沒有手機但擁有平板電腦的比例占 5%，沒有手機也沒有平板電腦的比例占 15 %．若在擁有手機的學生中任意挑選一人，試問此人同時也擁有平板電腦的機率為何？

解 令 A 表示這些學生中擁有手機的事件

B 表示這些學生中擁有平板的事件

則所求機率為 $P(B|A)$

$P(A')=5\%+15\%$（沒有手機有平板＋沒有手機也沒有平板）

故 $P(A)=1-P(A')=0.8$

$P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{0.6}{0.8}=\dfrac{3}{4}$.

70 獨立事件

設 A, B 為兩事件，若 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$，則稱 A, B 為獨立事件.

例題

若甲，乙兩種種子根據過去栽種經驗，知道其發芽率分別為 0.9 與 0.75．今從這兩種種子中各取一顆，假設各種子是否發芽相互獨立，試求：

(1) 恰有一顆種子能發芽的機率為何？
(2) 兩顆種子都沒有發芽的機率為何？
(3) 至少有一顆種子發芽的機率為何？

解 令 A 表示甲種種子發芽的事件，B 表示乙種種子發芽的事件．依題意，

$P(A)=0.9$, $P(B)=0.75$.

又 A, B 為獨立事件，則：

(1) $P(A\cap B')+P(A'\cap B)=P(A)P(B')+P(A')P(B)=0.9\times0.25+0.1\times0.75=0.3$.

(2) $P(A'\cap B')=P(A')P(B')=0.1\times0.25=0.025$.

(3) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.9+0.75-0.9\times0.75=0.975$.

或是 $1-P(A'\cap B')=1-0.025=0.975$.

71 三事件為獨立事件

設 A, B, C 為三事件，同時滿足下列條件時，稱 A, B, C 三事件為獨立事件.

(1) $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

(2) $P(B\cap C)=P(B)P(C)$.

(3) $P(A\cap C)=P(A)P(C)$.

(4) $P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$.

例題

溫布頓男子網球賽採五戰三勝制（即先勝三局者獲勝晉級），根據過去紀錄知甲選手與乙選手實力有段差距，甲選手與乙選手獲勝的機率比為 4：1，但比賽前兩局甲選手因失誤過多，導致兩局皆敗．假設經過短暫休息後，甲選手恢復原來水準，之後也沒有其他特殊狀況發生，請問比賽最後結果誰獲得晉級的可能性較大？

解

因甲選手與乙選手獲勝的機率比為 4：1,
故任比一場甲選手獲勝的機率為 0.8.
由樹狀圖得知若甲選手晉級，僅有一種可能情形.
故甲選手獲勝的機率為

$$0.8\times0.8\times0.8=0.512,$$

甲選手的勝率超過五成，所以甲選手晉級的可能性較大.