【封面】113下翰林數學 新學測高一公式集 / 紙質：特銅 120磅 / 無線膠裝 / G8K模大：43.6×30.3 cm / 88%列印

翰林數學

歷屆試題
實戰檢測

翰林數學

Suit you
你的合身教材

114學測公式集

新綱學測重要公式+練習題

高二

快充學測・快衝大學

3年完整電子檔
純公式電子檔

翰林 相信學習 Believe in Learning
96330010-33

114學測公式集 前言與目錄

本文重新整理高中數學【高一 第 1 冊與第 2 冊】中的主要公式，主要目標是希望能讓同學迅速檢視學過的核心內容，高效複習.

高一 第 1 冊

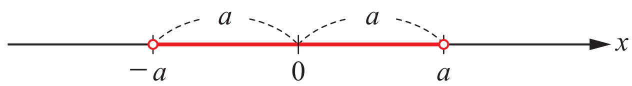
高一 第 2 冊

快充學測・快衝大學

1 絕對值不等式的解與圖形

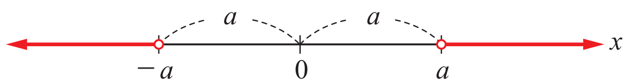
設 a 為正實數,

(1) $|x|<a$ 的解為 $-a<x<a$.



(2) $|x\ |\leq a$ 的解為 $-a\ \leq x\ \leq a$.

(3) $|x|>a$ 的解為 $x<-a$ 或 $x>a$.



(4) $|x\ |\geq a$ 的解為 $x\leq a-$ 或 $x\geq a$.

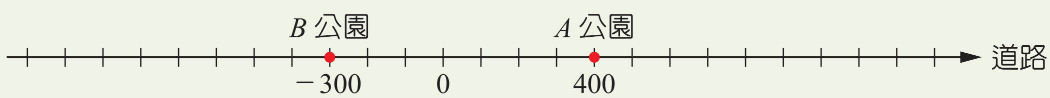
例題 1

某鳳梨酥包裝標示重量為 50g±5g,假設商品實際重量為 x 公克,寫出 x 滿足的絕對值不等式 $|x-a|\leq b$.

解 因為 $50-5\leq x\leq 50+5$,
故 $-5\leq x-50\leq 5$,
即 $|x-50|\leq 5$.

例題 2

已知一道路上有 A, B 兩公園,其相關位置可以用數線表示如下 x 今小菡想在此道路上購屋且希望住家附近 600 公尺內有公園,請幫她在下圖的數線上找出住家位置適合的範圍並將範圍以區間表示.



解 $|x-(-300)|\leq 600 \Rightarrow -600\leq x+300\leq 600 \Rightarrow -900\leq x\leq 300$
$|x-400|\leq 600 \Rightarrow -600\leq x-400\leq 600 \Rightarrow -200\leq x\leq 1000$
$[-900, 300]\cup[-200, 1000]=[-900, 1000]$.

2 乘法公式

(1) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.
$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

(2) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$. (立方和)
$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$. (立方差)

例題

已知 $x+\dfrac{1}{x}=4$，試求下列各式之值：

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$.　　　　(2) $x^3+\dfrac{1}{x^3}$.

解

(1) 由 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 移項知 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$,

故 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}$

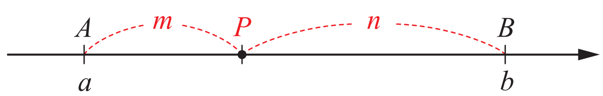
$=4^2-2=14.$

(2) 由 $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ 移項整理後知 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$,

故 $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=4^3-3\cdot1\cdot4=52.$

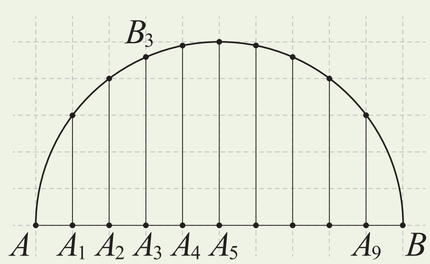
3 分點公式

設 $A(a)$, $B(b)$ 為數線上兩相異點，若 P 點介於 A, B 兩點之間且 $\overline{AP}:\overline{BP}=m:n$，則 P 點的坐標為 $\dfrac{na+mb}{m+n}$.



例題

如圖有一半圓形拱橋，已知 A 位置坐標為 191、B 位置坐標為 217. 今在橋面上十等分點 A, A_1, A_2, …, A_9, B 的地方各架上一垂直鋼條，問鋼條 $\overline{A_3B_3}$ 基部 A_3 的位置？



解

$\overline{AA_3}:\overline{A_3B}=3:7$

由分點公式

A_3 坐標為 $\dfrac{7\times191+3\times217}{10}=198.8$

4 雙重根式

(1) $\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$，其中 $a, b\geq 0$.

(2) $\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$，其中 $a\geq b\geq 0$.

a, b 常可以利用觀察法找出來.

例題

設 $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$ 的整數部分為 a，小數部分為 b，則 $\dfrac{1}{b}-\dfrac{7}{b+a}=$ ？

解

$\sqrt{11+6\sqrt{2}}=\sqrt{9+2+2\sqrt{9\cdot 2}}$

故 $a=3+1$，$b=\sqrt{2}-1$

$\dfrac{1}{b}-\dfrac{7}{b+a}=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}-\dfrac{7}{\sqrt{2}+3}$

有理化得 $(\sqrt{2}+1)-7\cdot\dfrac{3-\sqrt{2}}{7}=-2+2\sqrt{2}$

5 算幾不等式

設 a，$b\geq 0$，則 $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$.

等號只有在 $a=b$ 時成立.

例題

一條長 24 公尺的繩子，所能圍成的矩形面積最大是多少？

解

矩形長 a，寬 b 公尺

$\Rightarrow 2a+2b=24$

$\Rightarrow a+b=12$

因 $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

$\Rightarrow 6\geq\sqrt{ab}$

$\Rightarrow ab\leq 36$，矩形面積最大 36m^2

6 有理數指數的定義

設對於正實數 a 及正整數 n，整數 m，這個正數 b 就定義為 a 的 $\frac{m}{n}$ 次方，記為 $a^{\frac{m}{n}}$，也就是 $(a^{\frac{m}{n}})^n = a^m$.

例題

某放射性物質現重 128 克，n 年後重量會剩下 $128\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{3}}$ 克，試問：

5 年後剩下多少克？（四捨五入至整數）

解

由公式可看出每一年的重量比前一年多乘上 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$，

故 5 年後的重量為

$$128\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{3}} = 128\times\sqrt[3]{\frac{1}{2^5}} = 128\times\frac{1}{2\sqrt[3]{4}} = 32\sqrt[3]{2} \approx 40.32\text{（克）}.$$

7 科學記號

任意正實數 a 都可以用以下形式來表示：

$$a = b\times 10^n,$$

其中 $1 \le b < 10$，n 是整數，稱為 a 的**科學記號**表示法.

例如：一莫耳的物質有 6.02×10^{23} 個粒子；$0.0010246 = 1.0246\times 10^{-3}$ 等等.

例題

Byte 是電腦的記憶單位，簡記為 B（byte 的簡寫）. 已知 $1\,\text{KB} = 2^{10}\,\text{B}$，$1\,\text{MB} = 2^{10}\,\text{KB}$，$1\,\text{GB} = 2^{10}\,\text{MB}$，$1\,\text{TB} = 2^{10}\,\text{GB}$.

(1) 試問 1 TB 容量的硬碟，可儲存多少 bytes 的資料？

(2) 以科學記號表示且將係數部分四捨五入至整數位.

解

(1) $1\,\text{TB} = 2^{10}\,\text{GB} = 2^{10}2^{10}\,\text{MB} = 2^{10}2^{10}2^{10}\,\text{KB} = 2^{10}2^{10}2^{10}2^{10}\,\text{B} = 2^{40}\,\text{B}$.

所以 1 TB 容量的硬碟可儲存 2^{40} bytes 的資料.

(2) 使用計算機可得 $2^{40} \approx 1.099511628\times 10^{12} \approx 1.0995\times 10^{12}$.

8 常用對數的定義

對於每個正數 a，都有唯一的實數 x 滿足 $10^x=a$

這個實數 x 記為 $\log a$，稱為 a 的常用對數，亦即 $10^{\log a}=a$.

例如：$10^{\log 5566}=5566$，$\log(6.02\times10^{23})=23.7796\cdots$

⑴ 常用對數值增加 1，相當於原始數據乘上 10 倍.

⑵ 常用對數值減少 1，相當於原始數據乘上 $\frac{1}{10}$ 倍.

例題 1

已知芮氏地震規模（M）與地震釋放的能量（E，單位：焦耳）之間的關係為 $\log E=4.8+1.5M$，試問地震規模 5.0 釋放的能量是地震規模 3.0 釋放能量的多少倍？

解

由設芮氏地震規模 5.0、3.0 的地震，

釋放的能量分別為 E_1、E_2，

則 $\log E_1=4.8+1.5\times5.0=12.3$，

$\log E_2=4.8+1.5\times3.0=9.3$.

兩者相差 3，

因此前者釋放的能量為後者的 $10^3=1000$ 倍.

例題 2

在某個實驗中，原始數據為 a，所求數據 T 以 $T=2+3\log a$ 來計算，試問 T 每增加 1 時，原始數據 a 變為多少倍？

解

設 a 變成 a' 時 T 增加 1

即 $2+3\log a'=1+T=1+(2+3\log a)$

$3(\log a'-\log a)=1$

$\Rightarrow \log\frac{a'}{a}=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow a'=10^{\frac{1}{3}}a$

$10^{\frac{1}{3}}\approx2.15$ 倍.

9 多項式的除法原理

將多項式 $f(x)$ 除以多項式 $g(x)$（其中 $g(x)\neq 0$），
會得到唯一的商式 $q(x)$ 及餘式 $r(x)$
且 $f(x)=g(x)q(x)+r(x)$，
其中 $\deg(r(x))<\deg(g(x))$
或是 $r(x)=0$.

例題 1

已知多項式 $f(x)$ 除以 x^2-1 之餘式為 $2x+1$. 試選出正確的選項. 〔107 學測改〕

(1) 求 $f(1)$ 。

(2) 判斷 $f(x)$ 是否可能為 $4x^4+2x^2-3$?

解 依題意，可令 $f(x)=(x^2-1)Q(x)+(2x+1)$

(1) $f(1)=2\times 1+1=3$

(2) 不可能

因為 $4x^4+2x^2-3=(x^2-1)(4x^2+6)+3$，

餘式為 3 非 $2x+1x$

例題 2

若多項式 $f(x)=x^3-3x^2+x+3=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$，其中 a, b, c, d 是常數，試求 a, b, c, d 之值.

解 利用綜合除法使用綜合除法的過程可以簡化成

$$
\begin{array}{rrrr|l}
1 & -3 & +1 & +3 & 1 \\
 & +1 & -2 & -1 & \\
\hline
1 & -2 & -1 & +2 & \cdots\to d=2 \\
 & +1 & -1 & & \\
\hline
1 & -1 & -2 & & \cdots\to c=-2 \\
 & +1 & & & \\
\hline
1 & +0 & & & \cdots\to b=0 \\
\downarrow & & & & \cdots\to a=1
\end{array}
$$

10 餘式定理

多項式 $f(x)$ 被一次式 $ax-b$ 所除的餘式為 $f\left(\dfrac{b}{a}\right)$.

例題

(1) 已知多項式 $f(x)=x^3-8x^2+x-85$，試求 $f(9)$ 的值.

(2) 試求 $x^{101}+x^{10}+2$ 除以 $x-1$ 的餘式.

解

(1) 由綜合除法計算 $f(x)$ 被 $x-9$ 除之餘數 r

由餘式定理知 $r=f(a)$

故 $f(9)=5$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
1 & -8 & +1 & -85 & 9 \\
 & 9 & +9 & +90 & \\
\hline
1 & +1 & +10 & \boxed{+5} &
\end{array}
$$

(2) 由餘式定理知 $f(x)$ 除以 $x-1$ 餘式為 $f(1)$

計算 $f(1)=1^{101}+1^{10}+2=4$

11 因式定理

對於多項式 $f(x)$，下述性質成立 .

(1) 若 $f(x)$ 有一次因式 $ax-b$，則 $f\left(\dfrac{b}{a}\right)=0$.

(2) 若 $f\left(\dfrac{b}{a}\right)=0$，則 $f(x)$ 有一次因式 $ax-b$.

例題

若 x^4-3ax^2+bx+4 有因式 $(x+1)$ 及 $(x-2)$，求數對 $(a，b)$.

解

由 $f(-1)=0$ 及 $f(2)=0$

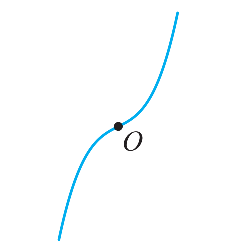
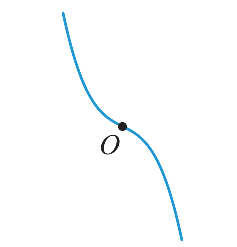
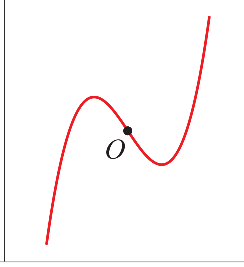
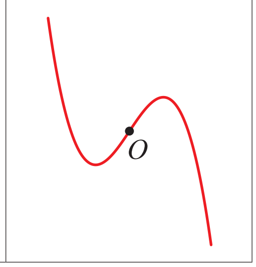
可得 $\begin{cases}1-3a-b+4=0\\16-12a+2b+4=0\end{cases}$　解得 $a=\dfrac{5}{3}$，$b=0$

12 $y=ax^3+px$ 的圖形

$y = ax^3 + px$，$a \neq 0$ 的圖形有以下特點：

(1) 圖形必過原點 $O(0, 0)$． 且對稱於原點 $O(0, 0)$，其原點為對稱中心．

(2) 函數圖形大致如下

a, p 同號		a, p 異號	
$a>0$	$a<0$	$a>0$	$a<0$
			

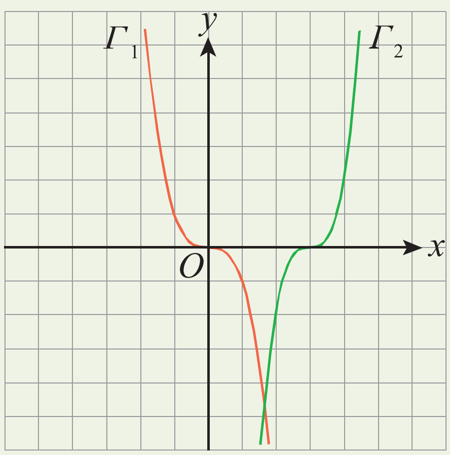
例題

下圖為下列三個函數的圖形 $y=a_1x^3$，$y=a^2(x-3)^3$．試選出正確的選項．

(1) Γ_1 為 $y=a_1x^3$ 的圖形

(2) $a_1>0$

(3) $a_2>0$



解

(1) Γ_1 通過 $(0, 0)$，Γ_2 通過 $(3, 0)$

故 Γ_1 為 $y=a_1x^3$ 的圖形

Γ_1 為 $y=a_2(x-3)^3$ 的圖形

(2) 令 $f(x)=a_1x^3$，由 $f(1)=a_1<0$（圖形判斷）

知 $a_1<0$

(3) 令 $g(x)=a_2(x-3)^3$，由 $g(4)=a_2(4-3)^3>0$

知 $a_2>0$

13 三次函數圖形的平移

三次多項式函數 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 必可表示為 $y=a(x+h)^3+p(x+h)+k$ 的形式，其中 $h=\dfrac{b}{3a}$．因此三次函數的圖形就一定可以化為 $y=ax^3+px$ 圖形的平移．

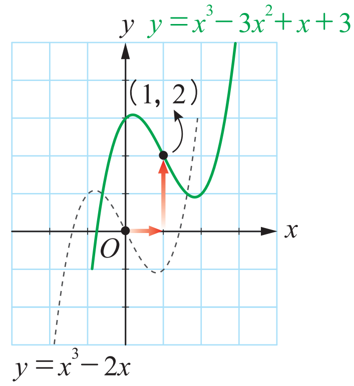
例題

已知 $x^3-3x^2+x+3=(x-1)^3-2(x-1)+2$.
試說明如何平移 $y=x^3-2x$ 的圖形後得到 $y=x^3-3x^2+x+3$ 的圖形，
並求出 $y=x^3-3x^2+x+3$ 圖形的對稱中心.

解 因為

$$x^3-3x^2+x+3=(x-1)^3-2(x-1)+2,$$

所以將 $y=x^3-2x$ 的圖形向右平移 1 單位，向上平移 2 單位後，就可以得到 $y=x^3-3x^2+x+3$ 的圖形，如圖所示.
由於 $y=x^3-2x$ 的對稱中心在原點 $O(0, 0)$，經上述平移後，可知 $y=x^3-3x^2+x+3$ 圖形的對稱中心在點 $(1, 2)$.



14 一次近似

設 $y=f(x)$ 為多項式函數，a 為實數，$y=f(x)$ 可改寫為

$$f(x)=a_n(x-a)^n+a_{n-1}(x-a)^{n-1}+\cdots+a_1(x-a)+a_0,$$

則 $y=a_1(x-a)+a_0$ 為 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 附近的一次近似．

例題

考慮函數 $y=x^3+2x^2-x+4$，試求：
(1) 此函數在 $x=-1$ 附近的一次近似.
(2) 利用(1)所求出的一次近似，試求此函數在 $x=-0.99$ 的近似值.

解 (1) 連續利用綜合除法，我們可以將 $y=x^3+2x^2-x+4$ 改寫為

$$y=x^3+2x^2-x+4=(x+1)^3-(x+1)^2-2(x+1)+6.$$

取到一次項，故 $y=x^3+2x^2-x+4$ 在 $x=-1$ 附近的一次近似為 $y=-2(x+1)+6$.

(2) 將 $x=-0.99$ 代入(1)所求出的一次近似，可得此函數在 $x=-0.99$ 的近似值為

$$(-2)(-0.99+1)+6=(-2)(0.01)+6=5.98.$$

15 直線的斜率

設直線 L 不是鉛垂線且 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 為直線 L 上相異兩點,

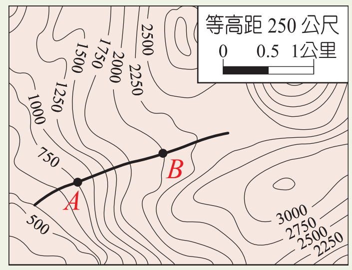
則直線 L 的斜率 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

例題

在地理學上, 將地圖上地表高度相同的各點連成一條閉合的曲線, 稱其為等高線, 曲線上數字即代表地表的高度.

此外, 定義兩地間的坡度為 $\dfrac{\text{兩地高度差}}{\text{兩地水平距離}}\times 100\ \%$.

圖為某山區的等高線圖, 試求 A, B 兩地間的坡度大約為多少?



解 由圖可看出 A, B 兩地間的高度差為 $2000-750=1250$ 公尺.
而由圖上的比例尺,
可量得 A, B 兩地間的水平距離約為 1 公里,
即 1000 公尺.

故坡度為 $\dfrac{1250}{1000}\times 100\ \%=125\ \%$.

16 點斜式

過點 $A(x_0, y_0)$ 且斜率為 m 的直線方程式為 $y-y_0=m(x-x_0)$.

例題

(1) 通過點 $(1, 2)$, 斜率為 -3 的直線.
(2) 通過點 $(-1, 2)$ 且 y 截距為 4 的直線. (y 截距為直線與 y 軸交點的 y 坐標)
(3) 斜率為 2 且 x 截距為 3 的直線. (x 截距為直線與 x 軸交點的 x 坐標)
(4) 通設 $A(0, 0)$, $B(10, 0)$, $C(10, 6)$, $D(0, 6)$ 為坐標平面上的四個點。如果直線 $y=m(x-7)+4$ 將四邊形 $ABCD$ 分成面積相等的兩塊，求 m。〔95學測〕

解

(1) 由點斜式 $y-2=(-3)(x-1) \Rightarrow 3x+y-1=0$

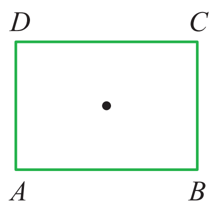
(2) y 截距知直線過點 $(0,4)$，計算斜率為 $\dfrac{4-2}{0-(-1)}=2$

再由點斜式得 $y-4=2(x-0) \Rightarrow y=2x+4$

(3) x 截距知直線過點 $(3,0)$，再由點斜式得

$y-0=2(x-3) \Rightarrow y=2x-6$

(4)



由圖形判斷平分面積時直線通過 A、B、C、D 中心點 $(5,3)$

故 $m=$ 過 $(7,4)$ 與 $(5,3)$ 的直線斜率 $=\dfrac{4-3}{7-5}=\dfrac{1}{2}$

17 兩平行直線的斜率相等

設兩相異直線（非鉛垂線）L_1、L_2 的斜率分別為 m_1、m_2，

(1) 若 $L_1 // L_2$，則 $m_1=m_2$.

(2) 若 $m_1=m_2$，則 $L_1 // L_2$.

例題

若三直線 L_1: $3x-y-1=0$，L_2: $x-y+1=0$，L_3: $2x+ky+1=0$，不能圍成一個三角形，求 k 值。

解

L_1，L_2 交點 $\begin{cases} 3x-y-1=0 \\ x-y+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

L_1，L_2，L_3 不能圍成一個三角形

必為 $L_3 //$ L_1，$L_3 // L_2$ 或 L_3 通過 $(1,2)$

(1) $L_3 // L_1 \Rightarrow -\dfrac{2}{R}=\dfrac{3}{1} \Rightarrow R=-\dfrac{2}{3}$

(2) $L_3 // L_2 \Rightarrow -\dfrac{2}{R}=1 \Rightarrow R=-2$

(3) 代入 $(1,2)$ 到 L_3 得 $R=-\dfrac{3}{2}$

18 兩垂直直線的斜率乘積為－1

設兩相異直線（非水平或鉛垂線）L_1、L_2 的斜率分別為 m_1、m_2，

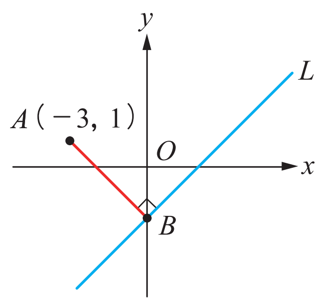
(1) 若 $L_1 \perp L_2$，則 $m_1m_2 = -1$.

(2) 若 $m_1m_2 = -1$，則 $L_1 \perp L_2$.

例題

已知一點 $A(-3, 1)$ 與直線 L：$x-y-2=0$，試求點 A 到直線 L 的垂足坐標.

解 如圖所示，設點 A 到直線 L 的垂足為點 B，則點 B 即直線 AB 與直線 L 的交點．又 L 的斜率為 1，故直線 AB 的斜率為 -1．由點斜式得直線 AB 的方程式為



$$y-1=-1(x-(-3)),$$

即 $x+y+2=0$, ①

又 L：$x-y-2=0$, ②

解①、②得 $x=0$，$y=-2$，故垂足點 B 的坐標為 $(0, -2)$.

19 點到直線的距離公式

點 $P(x_0, y_0)$ 到直線 L：$ax+by+c=0$ 的距離為 $\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

例題 1

試求點 $P(1, 1)$ 到直線 L：$3x-4y+11=0$ 的距離.

解 點 P 到直線 L：$3x-4y+11=0$ 的距離為

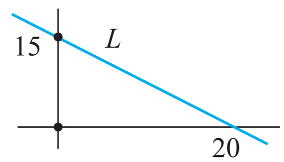
$$\frac{|3\times1-4\times1+11|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{10}{5}=2.$$

例題 2

坐標平面上有兩條平行直線. 它們的 x 截距相差 20, y 截距相差15. 則這兩條平行直線的距離為＿＿＿＿. 〔98 學測〕

解 兩直線做相同平移不影響彼此距離，故假設其中一直線 x，y 截距皆為0

另一直線 L 的 x，y 截距分別為 20，15



L 的方程式為 $y-15=\dfrac{0-15}{20-0}(x-0)\Rightarrow 3x+4y=60$

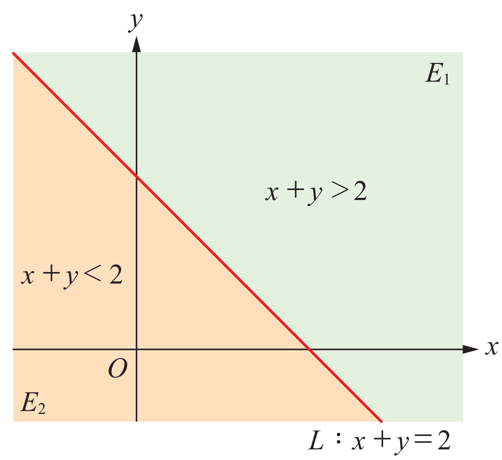
求原點至直線 L 的距離為 $\dfrac{|0+0-60|}{\sqrt{3^2+4^2}}=12$

20 直線不等式與半平面

直線不等式 $ax+by>0$、$ax+by<0$ 的圖形就是半平面，以下實例說明．

例：$x+y>2$ 的圖形就是半平面 E_1，

同理，$x+y<2$ 的圖形就是半平面 E_2，如圖．



例題

(1) 考慮直線 L: $2x+5y=7$ 與點 $A(5,0)$, $B(13,-4)$．

試判斷 A, B 在直線 L 的同側或異側？

(2) 若點 $P(1,t)$, $Q(3,-1)$ 在直線 L: $y=2x$ 的同側，試求 t 的範圍．

解 (1) A 代入 L 左式 $10+0\ (>7)$

B 代入 L 左式 $26-20\ (<7)$

故 A、B 異側

(2) L: $y-2x=0$

代入 P 至 $y-2x$ 中為 $(t-2)$

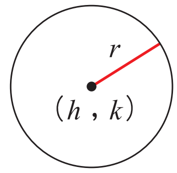
代入 Q 至 $y-2x$ 中為 $(-1-6)$

$t-2$，$(-1-6)$ 同側故為同號

即 $(t-2)(-1-6)>0\Rightarrow t-2<0$ 得 $t<2$

21 圓的標準式

圓心為 $A(h, k)$，半徑為 r 的圓方程式為 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$.



例題 1

試求滿足下列條件的圓方程式：

(1) 以點 $P(0, 0)$ 為圓心，半徑為 r 的圓.

(2) 以點 $A(-1, 2)$ 為圓心且過點 $B(2, 1)$ 的圓.

解

(1) 將圓心 $P(0, 0)$，半徑為 r 代入標準式. 可得圓方程式為

$$(x-0)^2+(y-0)^2=r^2,$$

即 $x^2+y^2=r^2$.

(2) 圓的半徑為

$$\overline{AB}=\sqrt{(-1-2)^2+(2-1)^2}=\sqrt{10}.$$

將圓心 $A(-1, 2)$，半徑為 $\sqrt{10}$ 代入標準式. 可得圓方程式為

$$(x+1)^2+(y-2)^2=10.$$

例題 2

判斷點 $P(2, 2)$，$Q(3, 0)$，$R\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 與圓 C: $x^2+y^2-4x-2y+4=0$ 的相對位置.

解

$x^2+y^2-4x-2y+4=0$

$x^2-4x+4+y^2-2y+1=1$

$(x-2)^2+(y-1)^2=1$

圓心 $A(2, 1)$

$r=1$

$\overline{AP}=\sqrt{(2-2)^2+(1-2)^2}=1=r$

$\overline{AQ}=\sqrt{(2-3)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}>r$

$\overline{AR}=\sqrt{(2-\frac{3}{2})^2+(1-\frac{1}{2})^2}=\sqrt{\frac{1}{2}}<r$

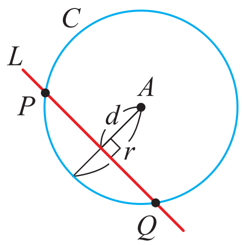
22 圓與直線的關係

設圓 C 的圓心為點 A, 半徑為 r, 圓心 A 到直線 L 的距離為 d, 由 d 與 r 的大小關係可以歸納出下列三種情形:

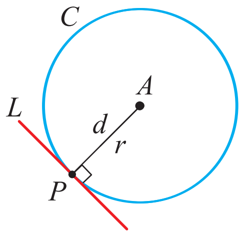
(1) 當 $d<r$ 時, 圓 C 與直線 L 交於兩點, 如圖(a)所示.

(2) 當 $d=r$ 時, 圓 C 與直線 L 交於一點 (相切), 如圖(b)所示.

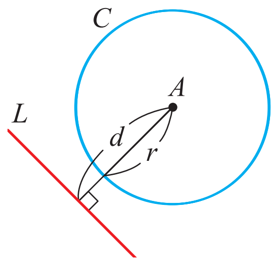
(3) 當 $d>r$ 時, 圓 C 與直線 L 不相交, 如圖(c)所示.



(a) $d<r$



(b) $d=r$



(c) $d>r$

例題

設圓 C: $x^2+y^2-6x+2y-6=0$, 試判斷圓 C 與下列直線的關係:

(1) L_1: $3x-4y+2=0$.　　(2) L_2: $2x-y+3=0$.

解 圓 C 的標準式為

$$(x-3)^2+(y+1)^2=16,$$

所以, 圓 C 的圓心為 $A(3,-1)$, 半徑 r 為 4.

(1) 圓心 A 到直線 L_1 的距離為

$$d_1=\frac{|3\times3-4\times(-1)+2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{15}{5}=3<4,$$

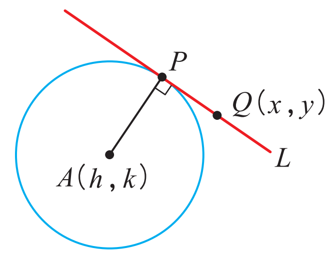
故由 $d_1<r$ 知圓 C 與直線 L_1 交於兩點.

(2) 圓心 A 到直線 L_2 的距離為

$$d_2=\frac{|2\times3-(-1)+3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}>4,$$

故由 $d_2>r$ 知圓 C 與直線 L_2 不相交.

23 圓的切線方程式



圓 C 的圓心 A、切點 P、P 點為切點與圓相切的直線 L

過圓上一點 $P(x_0, y_0)$ 的切線方程式,

可利用直線 AP 與切線 L 垂直

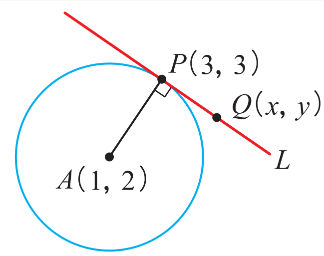
$$(\text{直線 } AP \text{ 的斜率})(\text{直線} L \text{的斜率}) = -1,$$

$$\frac{y_0-k}{x_0-h}\cdot\frac{y-y_0}{x-x_0}=-1$$

可得切線方程式 $(x_0-h)(x-x_0)+(y_0-k)(y-y_0)=0$

例題

若圓 C: $(x-1)^2+(y-2)^2=5$ 及圓上一點 $P(3, 3)$, 求過點 P 的切線 L.



解

已知圓心為 $A(1, 2)$, 設切線上另一點為 $Q(x, y)$,

由國中幾何我們知道 $AP\perp PQ$, 即

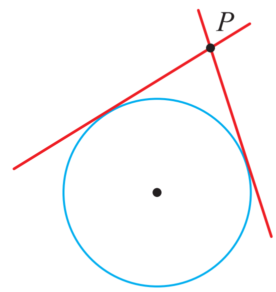
$(\text{直線 } AP \text{ 的斜率})(\text{直線 } PQ \text{ 的斜率}) = -1$,

故得

$$\frac{3-2}{3-1}\cdot\frac{y-3}{x-3}=-1,$$

整理可得 $2x+y-9=0$, 此即切線 L 的方程式

24 過圓外一點$P(x_0, y_0)$的切線方程式



過圓外一點 P 的，則過點 P 的兩條切線

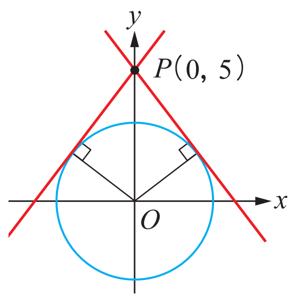
(1) 設直線方程式

(2) 〔圓心到切線的距離〕=〔半徑〕幾何方法的判定

若上述切線方程式只有一解，則有一解可能為鉛垂線，直接檢驗即可判斷.

例題

試求過點 $P(0, 5)$ 且與圓 C: $x^2+y^2=9$ 相切之切線方程式.



解 圓 C 的半徑為 3，點 P 於圓 C 外，如圖所示.

設過點 P 與圓 C 相切的切線方程式為

$$y-5=m(x-0),$$

即 $mx-y+5=0$. 由圓心 O 至切線距離即半徑，得

$$\frac{|m\cdot 0-0+5|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=3,$$

整理得 $3\sqrt{m^2+1}=5$，兩邊平方得 $9(m^2+1)=25$，即 $m^2=\dfrac{16}{9}$，

解得 $m=\pm\dfrac{4}{3}$. 故得切線方程式為 $y=\dfrac{4}{3}x+5$ 及 $y=-\dfrac{4}{3}x+5$.

25 等差數列的一般項

若等差數列〈a_n〉的首項為 a_1，公差為 d，則其一般項為 $a_n = a_1 + (n-1)d$.

例題

$a_n =(n+1)+(\frac{n}{2}+2)+(\frac{n}{4}+3)+(\frac{n}{8}+4)$，$n \in N$，

有關數列〈a_n〉下列何者敘述為真？

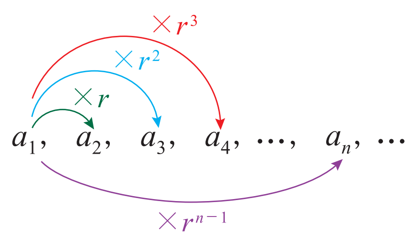
(A)為等差數列，公差為 10　(B)為等差數列，公差為 $\frac{15}{8}$　(C)為等比數列，公比為 $\frac{1}{8}$

(D)為等比數列，公比為 $\frac{1}{2}$　(E)既非等差亦非等比.

解　因 $a_n = \frac{15}{8}n + 10$，為公差 $\frac{15}{8}$ 的等差數列.

26 等比數列的一般項

若等比數列〈a_n〉的首項為 a_1 ($a_1 \neq 0$)，公比為 r ($r \neq 0$)，
則其一般項為 $a_n = a_1 r^{n-1}$.



例題

設等比數列〈a_n〉之首項 a_1 與公比為 $\frac{3}{2}$，試選出正確的選項.

(1) $\log a_1$, $\log a_2$, $\log a_3$ 是公差為正的，等差數列.

(2) $\log a_1$, $\log a_2$, $\log a_3$ 是公差為負的，等差數列.

(3) $\log a_1$, $\log a_2$, $\log a_3$ 是公比為 $\frac{3}{2}$，的等比數列.

(4) $\log a_1$, $\log a_2$, $\log a_3$ 是公比為 $\log \frac{3}{2}$，的等比數列.

解　因 $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{3}{2}$　故 $\log a_2 - \log a_1 = \log a_3 - \log a_2 = \log \frac{3}{2} > 0$

故 $\log a_1$、$\log a_2$、$\log a_3$ 為公差為正的等差數列.

27 遞迴數列

遞迴數列的定義：如果數列除了起始條件外，後面的項都可以由前面的項依公式計算，即可以表成 $a_n = f(a_{n-1})$ 或者 $f(a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_{n-2k})$ 的形式，此數列就是遞迴數列．

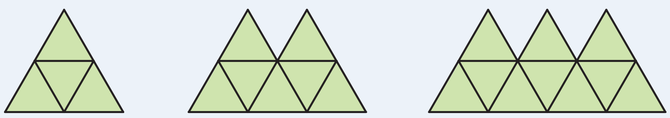
例如：等差數列可寫成 $\begin{cases} a_1 = a, \\ a_n = a_{n-1} + d,\ n \geq 2. \end{cases}$

等比數列可寫成 $\begin{cases} a_1 = a, \\ a_n = ra_{n-1},\ n \geq 2. \end{cases}$

費波那契數列可以寫成 $\begin{cases} a_1 = 1,\ a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n,\ n \geq 1. \end{cases}$

例題 1

用單位正三角形拼片依照如下的規律拼成若干圖形，如圖 2.



第1圖　第2圖　第3圖

設 a_n 是要拼成第 n 圖所需要的單位正三角形個數．回答下列問題：

(1) 試求 a_1, a_2, a_3, a_4.

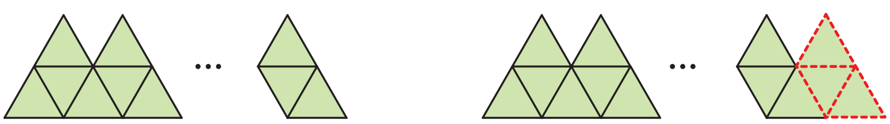
(2) 寫出數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴式.

(3) 試求一般項 a_n.

解

(1) 實際畫畫看可得 $a_1 = 4$, $a_2 = 7$, $a_3 = 10$.

(2) 如圖，可看出第 $n-1$ 圖加上三個單位正三角形，就得到第 n 圖，如以下紅色虛線所示.



第 $n-1$ 圖　第 n 圖

可得數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴式為 $\begin{cases} a_1 = 4, \\ a_n = a_{n-1} + 3,\ n \geq 2. \end{cases}$

(3) $\langle a_n \rangle$ 是一個首項為 4，公差為 3 的等差數列．因此，一般項為

$$a_n = 4 + (n-1)3 = 3n + 1.$$

例題 2

第 1 天獲得 3 元，第 2 天獲得 9 元，第 3 天獲得 27 元，每天所獲得的錢為前一天的 3 倍，如此進行，試問第 16 天所獲得的錢最接近一百萬、一千萬、一億，還是十億？

解

設第 n 天獲得的錢為 a_n，$n \geq 1$

$\begin{cases} a_1 = 3, \\ a_{n+1} = a_{n+1} \times 3,\ n \geq 1 \end{cases}$，得 $a_n = 3^n$ 為一等比數列

$a_{12} = 3^{16} = (3^4)^4 = (81)^4 \approx (8 \times 10)^4 = 2^{12} \times 10^4 = 4.096 \times 10^7$

1 百萬 $= 10^6$，1 千萬 $= 10^7$，1 億 $= 10^8$

故最接近一千萬

28 等差級數求和公式

首項為 a_1，公差為 d 的 n 項等差級數和為

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + \cdots + (a_1 + (n-1)d)$$
$$= \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2}$$
$$= \frac{n(a_1 + a_n)}{2}. \left(\text{即} \frac{\text{項數} \times (\text{首項} + \text{末項})}{2}\right)$$

例題

某人購買一棟房屋，簽約時先付 100 萬元，餘款分二十期付清．已知這二十期款額成等差數列，前兩期共 30.5 萬元，三、四兩期共 28.5 萬元，則此棟房屋總價為何？

解

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 2a_1 + d \\ a_3 + a_4 &= 2a_1 + 5d \\ a_5 + a_6 &= 2a_1 + 9d \\ &\ \vdots \\ a_{19} + a_{20} &= 2a_1 + 37d \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\Big\} 4d \\ &\Big\} 4d \\ &\ \vdots \\ &\ \vdots \end{aligned}$$

故 $a_1 + a_2$，…，$a_{19} + a_{20}$ 也是等差數列，首項為 30.5 萬元，

公差 23 萬元，故 $\dfrac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2}$

$$(a_1 + a_2) + \cdots + (a_{19} + a_{20}) = \frac{10(2 \cdot 30.5 + (10-1) \cdot 2)}{2} = 395 \text{ 萬元}$$

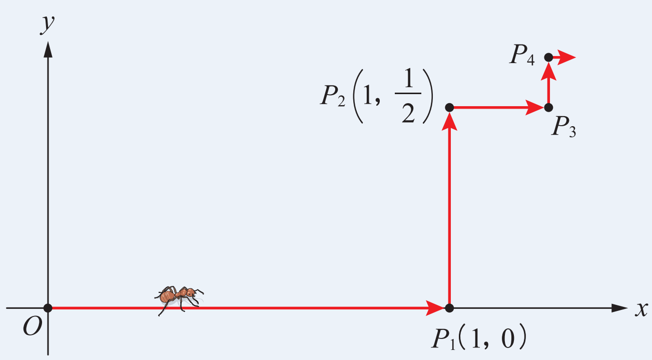
29 等比級數求和公式

首項為 a_1 ($a_1 \neq 0$), 公比為 r ($r \neq 0$) 的 n 項等比級數和為

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{n-1} = \begin{cases} n a_1, & \text{當 } r = 1 \text{ 時}, \\ \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}, & \text{當 } r \neq 1 \text{ 時}. \end{cases}$$

例題

一隻螞蟻在坐標平面上由原點出發，如下圖所示 x 牠第一次向右移動 1 單位，到達點 P_1 $(1, 0)$，第二次向上移動 $\frac{1}{2}$ 單位，到達點 $P_2\left(1, \frac{1}{2}\right)$，而後依照先向右再向上的方式移動，而且每次移動的距離是前一次的一半，如此依序移動到點 P_3，P_4，P_5，… x 設 n 為正整數，點 P_n 坐標為 (x_n, y_n)，試求點 P_6 的坐標為何？



解

到達 P_6 需向右移動 $1 + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^4 + \cdots + (\frac{1}{2})^{2(n-1)}$,

且向上移動 $\frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^5 + \cdots + (\frac{1}{2})^{2n-1}$

由等比級數求和公式可得

$$1 + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^4 + \cdots + (\frac{1}{2})^{2(n-2)} = \frac{1 \cdot (1 - (\frac{1}{4})^n)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}(1 - (\frac{1}{4})^n)$$

$$(\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2})^3 + \cdots + (\frac{1}{2})^{2n-1} = \frac{\frac{1}{2}(1 - (\frac{1}{4})^n)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}(1 - (\frac{1}{4})^n)$$

故 P_{2n} 坐標為 $(\frac{3}{4}(1 - (\frac{1}{4})^n), \frac{2}{3}(1 - (\frac{1}{4})^n))$.

30 求和公式

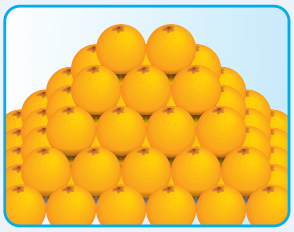
(1) $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(3) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

例題 1

水果行老闆將柳丁堆成塔狀，每四個柳丁的空隙上方放一個柳丁，已知此柳丁塔共有 10 層，且頂層的柳丁有 2 個，圖 8 為上面幾層的示意圖，試問一共有多少個柳丁？



解 第一層柳丁有 1×2 個

第二層柳丁有 2×3 個

第三層柳丁有 3×4 個

$\vdots$

第十層柳丁有 10×11 個

故共有

$(1\times2)+(2\times3)+\cdots+(10\times11)$　　$(n(n+1)=n^2+n)$

$=(1^2+1)+(2^2+2)+\cdots+(10^2+10)$

$=(1^2+2^2+\cdots+10^2)+(1+2+\cdots+10)$

$=\dfrac{10\times11\times21}{6}+\dfrac{10\times11}{2}$

$=440$(個)

例題 2

數列〈a_n〉滿足 $\begin{cases} a_1=9, \\ a_n=a_{n-1}+8n,\ n\geq 2. \end{cases}$ 求此數列的一般項 a_n.

解

$a_2=a_1+8\cdot 2$

$a_3=a_2+8\cdot 3=8\cdot 3+8\cdot 2+a_1$

$a_4=a_3+8\cdot 4=8\cdot 4+8\cdot 3+8\cdot 2+a_1$

依此類推可得

$a_n=8\cdot n+8\cdot(n-1)+\cdots+8\cdot 2+8\cdot 1+1$

$=1+8\cdot(1+\cdots+n)$

$=1+8\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}=4n^2+4n+1$

31 加權平均數

設有 n 個數據 $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$，其對應的權數分別為

$w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_n$，則加權平均數為 $W=\dfrac{x_1w_1+x_2w_2+\cdots+x_nw_n}{w_1+w_2+\cdots+w_n}$.

例題

小珊做了許多蛋糕， 其主要食材的成分比例分別為雞蛋 20 %，麵粉 50 %，綜合水果 30 %.
若雞蛋、麵粉、綜合水果每公斤的價格分別為 70、40、50 元，試問蛋糕的食材成本平均為每公斤多少元？

解

$70\times 20\%+40\times 50\%+50\times 30\%$

$=14+20+15$

$=49$（元）

32 幾何平均數

n 個正數 $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ 的幾何平均數定義為

$$G=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}.$$

例題

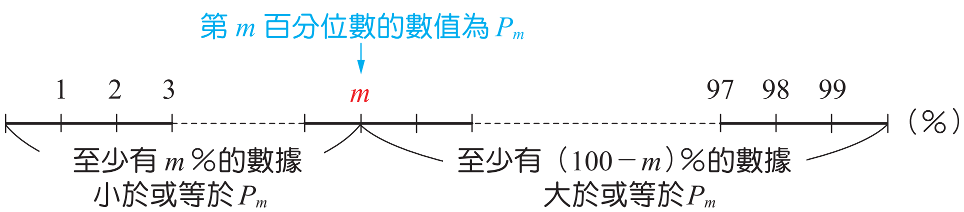
已知某公司近三年來的營收成長率分別為 10 %，−5 %，15 %，則這三年的每年平均成長率為何？（四捨五入取到百分數的小數點後第一位）

解　這三年的每年平均成長率為

$$r=\sqrt[3]{(1+10\ \%)(1-5\ \%)(1+15\ \%)}-1\approx 0.063174888,$$

故每年平均成長率約為 6.3 %.

33 百分位數



假設一組資料有 n 筆數據，其第 m 百分位數 P_m 的算法是：先將這 n 筆數據由小到大排序，並計算 $I=n\times\dfrac{m}{100}$.

⑴ 當 I 不為整數，取大於 I 的最小整數 M，則 P_m 為第 M 筆數據的值.

⑵ 當 I 為整數，則 P_m 為第 I 筆數據與第 $I+1$ 筆數據的平均值.

例題

如某班 40 位同學數學成績由小排到大，如下所示：

30，32，38，46，48，52，52，53，55，59，
60，60，62，62，64，68，69，70，72，72，
73，75，75，76，77，78，78，79，81，82，
82，83，85，86，88，88，90，92，96，98.

第 12 百分位數：$40\times\dfrac{12}{100}=4.8$，取第 5 筆成績的值為 $P_{12}=48$（分）.

第 80 百分位數：$40\times\dfrac{80}{100}=52$，取排在第 32，33 筆成績的平均值，得

$$P_{80}=\frac{83+85}{2}=84\text{（分）}.$$

34 變異數、標準差

(1) 當設一組數據 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 之算術平均數為 μ，則定義變異數與標準差如下：

變異數 $\sigma^2 = \dfrac{1}{n}\left((x_1-\mu)^2+(x_2-\mu)^2+\cdots+(x_n-\mu)^2\right).$

標準差 $\sigma = \sqrt{\dfrac{1}{n}\left((x_1-\mu)^2+(x_2-\mu)^2+\cdots+(x_n-\mu)^2\right)}.$

例題

已知 5 個數 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0$ 且 $x_2^{\,2}+x_2^{\,2}+x_3^{\,2}+x_4^{\,2}+x_5^{\,2}=580$，則這 5 個數的標準差為何？

解 這 5 個數的平均數記為 $\mu=\dfrac{1}{5}(x_2+\cdots+x_5^{\,2})=10$

這 5 個數的標準差為

$$=\sqrt{\frac{1}{5}\left((x_1-\mu)^2+\cdots+(x_5-\mu)^2\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{5}\left((x_1^{\,2}+\cdots+x_5^{\,2})-2\mu(x_1+\cdots+x_5)+(\mu^2+\cdots+\mu)^2\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{5}(x_1^{\,2}+\cdots+x_5^{\,2})-\mu^2}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{5}\times580-10^2}=\sqrt{16}=4$$

(2) 若數據 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，的平均數 μ_x，標準差 S_x，經直線函數 $y=ax+b$ 調整為 $y_i=ax_i+b$，$i=1, 2, \cdots, n$，則新數據 $y_1, y_2, \cdots, y_n$，的平均數

$\mu_y=a\mu_x+b$，標準差 $\sigma_y=|a|\sigma_x$.

例題

某公司 9 名員工薪水如下：

27530，30890，28010，28490，29930，28490，28970，29450，28970（元），將以上數據減去 27050 後再除以 480，得新數據如下：

1，8，2，3，6，3，4，5，4.

(1) 新數據的算術平均數及標準差為何？

(2) 公司員工薪水的算術平均數及標準差為何？

解 (1) 新數據平均值為$\dfrac{1+8+2+3+6+3+4+5+4}{9}=4$

$=$標準差$\sqrt{\dfrac{(1^2+8^2+2^2+3^2+6^2+3^2+4^2+5^2+4^2)}{9}-4^2}=\sqrt{20-16}=2$

(2) 若原平均數 μ，標準差 S

由 $\dfrac{1}{480}(\mu-27050)=4$ 及 $\dfrac{1}{480}\cdot S=2$ 可得

$\mu=28970$，$S=960$

35 標準化數據

一組數據 x_1，…，x_n 的平均 $\bar{x}$，標準差 σ，則此組數據的標準化數 $\dfrac{x_i-\mu}{\sigma}$，$i=1$，…，n.
據為 標準化數據的算術平均數為 0，標準差為 1.

例題

已知 7 位學生第一次數學模擬考成績為 2，3，4，5，6，7，15 級分，其算術平均數為 6 級分與標準差為 4 級分．而第二次數學模擬考成績為 9，10，11，12，13，14，15 級分，其算術平均數為 12 級分與標準差為 2 級分．若小芬為其中一個成員，第一次成績是 7 級分，第二次成績是 13 級分，試求她這兩次成績標準化後的數據為何？

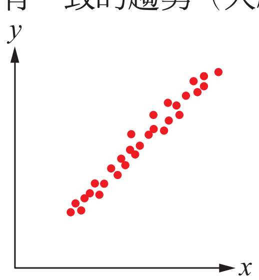
解 第一次成績的標準化數據為 $\dfrac{7-6}{4}=\dfrac{1}{4}$

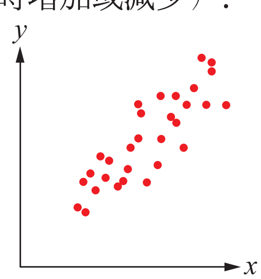
第二次成績的標準化數據為 $\dfrac{13-12}{2}=\dfrac{1}{2}$

36 正相關、負相關、零相關

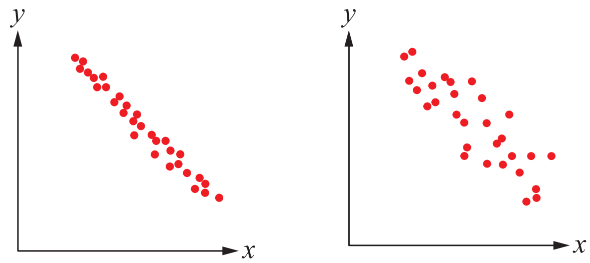
由散布圖可以快速觀察出兩個變量之間是否有關係.

(1) **正相關**：兩個變量大約有一致的趨勢（大約同時增加或減少）.

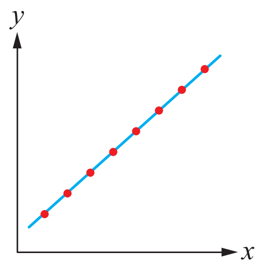




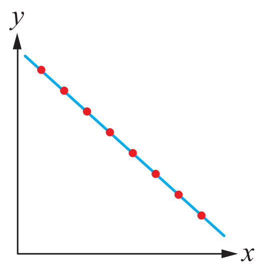
(2) **負相關**：兩個變量趨勢大約相反，一個增加，則另一個大概就會減少；或一個減少，另一個大概就會增加.



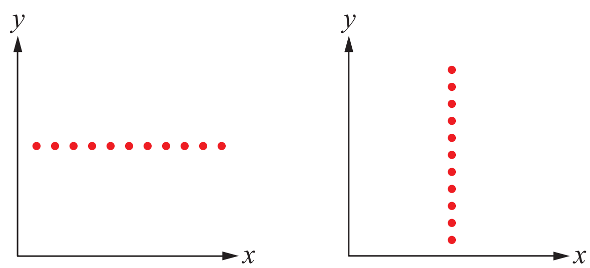
(3) **完全正相關**：資料全部在一條斜率為正的直線上.



(4) **完全負相關**：資料全部在一條斜率為負的直線上.



(5) **零相關**：兩個變量的變化之間無關.



37 由原始資料求相關係數

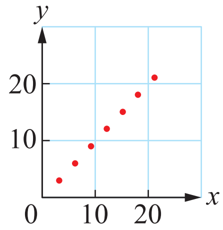
原始數據資料 (x_1, y)，(x_2, y_2)，…，(x_n, y_n) 的相關係數為

$$r=\frac{(x_1-\mu_x)(y_1-\mu_y)+(x_2-\mu_x)(y_2-\mu_y)+\cdots+(x_n-\mu_x)(y_n-\mu_y)}{\sqrt{(x_1-\mu_x)^2+(x_2-\mu)^2+\cdots+(x_n-\mu_x)^2}\cdot\sqrt{(y_1-\mu_y)^2+(y_2-\mu_y)^2+\cdots+(y_n-\mu_y)^2}}$$

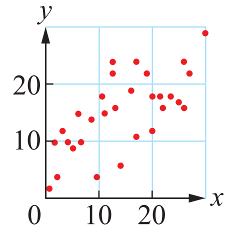
（一）相關係數 $r>0$

當 $r=1$ 時，資料均在同一條斜率為正的直線上，當 $0<r<1$ 時，r 愈大，代表資料分布大致呈右上左下，且資料的分布愈靠近於某條斜率為正的直線.

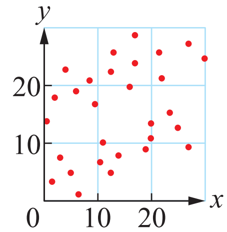
$r=1$



$r=0.7$



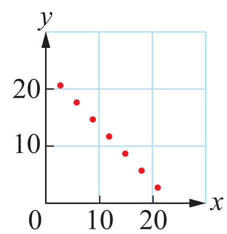
$r=0.3$



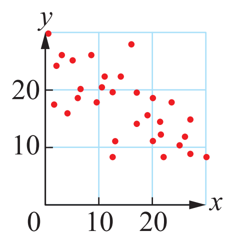
（二）相關係數 $r<0$

當 $r=-1$ 時，資料均在同一條斜率為負的直線上，當 $-1<r<0$ 時，r 的絕對值愈大，代表資料分布大致呈左上右下，且資料的分布愈靠近於某條斜率為負的直線.

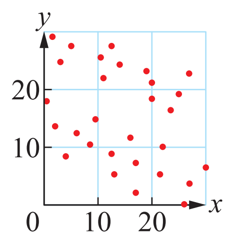
$r=-1$



$r=-0.7$



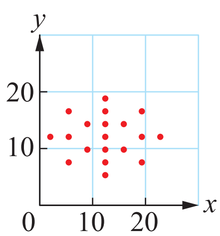
$r=-0.3$



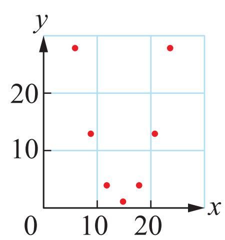
（三）相關係數 $r=0$

它們的分布呈現左右對稱、或者上下對稱.

$r=0$



$r=0$

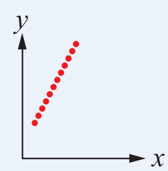


又當兩組數據的散布圖完全落在一條水平直線或鉛垂直線時，我們規定其相關係數 $r=0$.

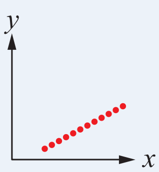
例題

以下 5 組原始數據的散布圖，問哪些相關係數為 1？

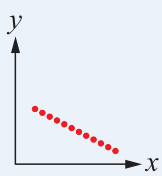
(A)



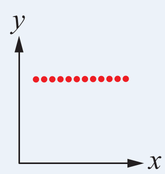
(B)



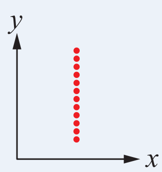
(C)



(D)



(E)



解　因相關係數為 1，故

所有數據點完全在一條斜率為正的直線上

故僅(A)、(B)圖符合

38 二維數據的最適直線方程式

數據 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ 之 y 對 x 的最適直線方程式為

$y-\mu_y=r\cdot\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}\cdot(x-\mu_x)$，其中 r 為相關係數.

例題

高三甲班第一次月考數學成績 (x) 與物理成績 (y) 的平均數 $\mu_x=70$，$\mu_y=60$，標準差 $\sigma_x=10$，$\sigma_y=5$，相關係數 $r=0.8$. 試求物理成績 (y) 對數學成績 (x) 的最適直線方程式.

解

由最適直線公式可得

$(y-60)=0.8\cdot\dfrac{5}{10}(x-70)$

最適直線為

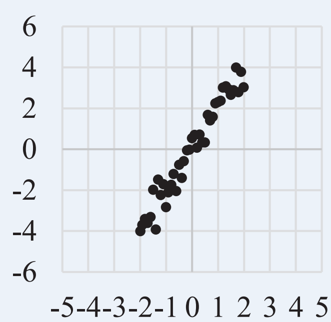
$y=0.4x+32$

例題

處理二維數據時，有種方法是將數據垂直投影到某一直線，並以該直線為數線，進而了解投影點所成一維數據的變異. 右圖的一組二維數據，試問投影到哪一選項的直線，所得之一維投影數據的變異數會是最小？

(A) $y=2x$　(B) $y=-2x$　(C) $y=-x$

(D) $y=\dfrac{x}{2}$　(E) $y=-\dfrac{x}{2}$　〔111 學測數 A〕

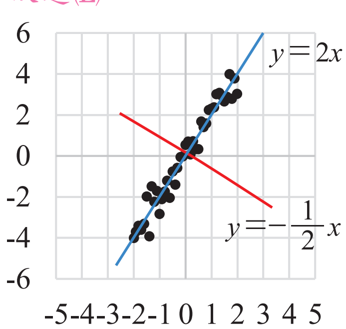


解

由 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ 投影到 $\overrightarrow{AB}$ 的垂直線上距離最大

因此 (x_i, y_i) 投影到最適直線的垂直直線上的變異最小

故選(E)



39 加法原理

若完成一件工作的方法，可分成 k 類，各類之間都沒有重複的情形，每一類方法分別有 n_1，⋯，n_k 種，則完成這件工作的方法是所有類的方法數的和，即

$n_1+n_2+\cdots+n_k$ 種.

例題

從法國馬賽到巴黎可以乘坐飛機、高鐵及長途巴士，其中飛機有 55 班，高鐵有 35 班，長途巴士有 1 班，則從馬賽到巴黎共有多少種班次可選擇.

解

$$\underset{\text{飛機}}{55}+\underset{\text{高鐵}}{35}+\underset{\text{巴士}}{1}=91$$

40 乘法原理

若完成一件工作的方法，可依序分成 k 個步驟，且完成每一步驟的方法分別有 n_1，⋯，n_k 種，則完成這件工作的方法是所有步驟的方法數的乘，即

$n_1\times n_2\times\cdots\times n_k$ 種.

例題

要設定一個五個數字的密碼，且每一個數字只能使用 0，1 或 2 有多少組密碼的第二個數字是 1，且第四個數字不是 1？

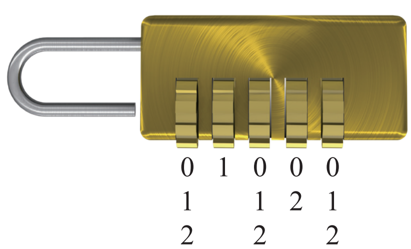
解

第一個位置有 3 種選法（0，1，2），第二個位置只能選1，

第四個位置有兩種選法（0 或 2）.

由乘法原理知，共有

$3\times1\times3\times2\times3=54$ 組不同的密碼.



41 取捨原理

設 A，B，C 為有限集合．則有:

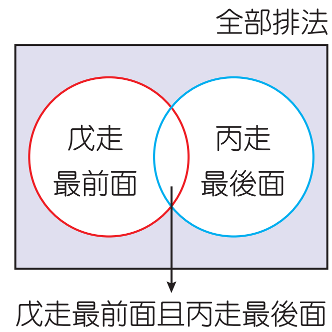
(1) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$.

(2) $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$.

例題

甲、乙、丙、丁、戊五人排成一行進入遊樂場的鬼屋，試問：戊不走最前面，且丙不走最後面的排法有多少種？

解 如圖，



由取捨原理，所求為

"全部排法－戊走最前面

－丙走最後面

＋戊走最前面且丙走最後面."

全部排法有$5!$種.

戊走最前面有$4!$種（因為此時為"戊□□□□"）.

丙走最後面有$4!$種（因為此時為"□□□□丙"）.

戊走最前面且丙走最後面有$3!$種（因為此時為"戊□□□丙"）.

因此，共有

$$5!-4!-4!+3!=120-24-24+6=78 \text{ 種排法.}$$

42 n 個不同物品的排列

將 n 個不同物品排成一列有

$$n!=n\times(n-1)\times(n-1)\times\cdots\times2\times1 \text{ 種方法.}$$

例題

小珊家的大門用的是電子鎖。如果要解鎖的話，必須將 1 到 9 的所有數字，依某種順序都按過一次．試問：

(1) 有多少種按的順序？

(2) 如果設定 5 號必須在第五次按到，那這樣有多少種按的順序？

解 (1) 九個數字的任何一種排列就是一種按的順序．因此有$9!=362880$ 種按的順序.

(2) 現在"5"必須出現在第五個數字，即

□□□□ 5 □□□□，

剩下八個數字任意排，就是一種按的順序.

因此有$8!=40320$ 種按的順序.

43 n 個不同物品選出 k 個排列

令 P_k^n 表示從 n 個不同物品中選出 k 個（$0 \leq k \leq n$）排成一列的方法數，則

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

例題

從 1，2，3，4，5，6，7 之中任取 4 個不同的數字排成一列，試求有多少種排法？

解 7 個數字中，任取 4 個不同的數字排成一列，共有

$$P_4^7 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840 \text{ 種排法.}$$

44 含有相同物品的排列

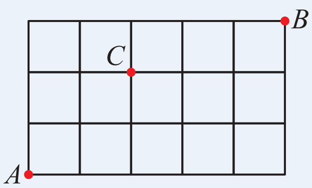
設 n 個物品分成 k 類，每類各有 m_1，m_2，…，m_k 個（每類中的物品相同且 $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$），則這 n 個物品排成一列有 $\dfrac{n!}{m_1!m_2!\cdots m_k!}$.

例題

如圖的棋盤街道，試求：

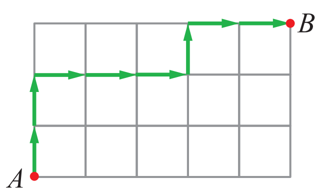
(1) 從 A 點走到 B 點的最短路徑有多少條？

(2) 從 A 點走到 B 點且一定要經過 C 點的最短路徑有多少條？



解 若是最短路徑，則每一步必定是“向上”或“向右”，

(1) 先畫幾條路線來觀察：



左圖的路線可用“上上右右右上右右”來表示.

一般來說，“右右右右右上上上”的排列與 A 到 B 的路線一一對應.

因此共有 $\dfrac{8!}{5!\,3!} = 56$ 條.

(2) 一定要經過 C 點，則必須由 A 走到 C，再由 C 走到 B.

由 A 走到 C 必須要 2 個右 2 個上，有 $\dfrac{4!}{2!\,2!}$ 種.

由 C 走到 B 必須要 3 個右 1 個上，有 $\dfrac{4!}{3!}$ 種.

因此，利用乘法原理共有

$$\frac{4!}{2!\,2!} \times \frac{4!}{3!} = 24 \text{ 條.}$$

45 重複排列

從 n 種物品中取出 k 個（每種物品都至少有 k 個），物品可以重複出現的排列有 n^k 種方法.

例題

已知目前每組手機號碼共有 10 碼，若某家電信業者其手機號碼開頭的前四碼是 0910，則以 0910 作為前四碼可以提供多少組手機號碼？

解

0910 $\underset{①}{\_}\ \underset{②}{\_}\ \underset{③}{\_}\ \underset{④}{\_}\ \underset{⑤}{\_}\ \underset{⑥}{\_}$

餘下的 6 個數字都可以為 0～9，故共有

$10\times10\times10\times10\times10\times10=10^6$ 個

46 組合

用 C_k^n 表示從 n 個不同的物品中挑出 k 個不同物品的組合數（$0\leq k\leq n$），則

$$C_k^n=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

例題

某地舉行議員選舉，甲、乙、丙、丁、戊 5 人要選出 3 人．試問當選人的組合有多少種可能？

解

此即從 5 個不同的人中挑出 3 個不同人的組合．有

$C_3^5=\dfrac{5\times4\times3}{3\times2\times1}=10$ 種可能．

例題

某冰淇淋店最少需準備 n 桶不同口味的冰淇淋，才能滿足廣告所稱「任選兩球不同口味冰淇淋的組合數超過 100 種」．試問來店顧客從 n 桶中任選兩球（可為同一口味）共有幾種方法？〔111 學測數 A〕

(1) 101　(2) 105　(3) 115　(4) 120　(5) 225

解

任選二球不同口味的組合有 C_2^n 種，故

$C_2^n>100\Rightarrow\dfrac{n(n-1)}{2}>100\Rightarrow n(n-1)>200$

由 $15\times14>200>14\times13$ 知 n 最小值為 15

任選二球不同口味有 C_2^5 種

兩球同一種口味有 15 種

故共有 $C_2^{15}+15=120$（種）

47 二項式定理

設 n 為非負整數，則

$$(x+y)^n=C_0^n x^n y^0+C_1^n x^{n-1}y^1+\cdots+C_k^n x^{n-k}y^k+\cdots+C_0^n x^0 y^n.$$

例題

(1) $(a+2b)^6$ 的展開式中，a^4b^2 的係數為何？

(2) 從 $(2+\sqrt{2})^5$ 可表示成 $a+b\sqrt{2}$，其 a，b 皆為整數，問 b 值為何？

(3) 在 $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^6$ 的展開式中，常數項為何？

解

(1) 在 $(a+2b)^6$ 的展開式中，a^4b^2 項會出現為

$C_2^6 a^4(2b)^2=15a^4\times 4b^2=60a^4b^2$,

故其係數為 60.

(2) $(2+\sqrt{2})^5=C_0^5 2^5+C_1^5 2^4\cdot\sqrt{2}+C_2^5\cdot 2^3\cdot\sqrt{2}^2+C_3^5\cdot 2^2\sqrt{2}^3+C_4^5 2^1\sqrt{2}^4+C_5^5\sqrt{2}^5$

$=(C_0^5\cdot 2^5+C_2^5\cdot 2^3\sqrt{2}^2+C_4^5 2^1\cdot\sqrt{2}^4)+(C_1^5\cdot 2^4+C_3^5 2^2\cdot 2+C_5^5 2^2)\sqrt{5}$

故 $b=C_1^5\cdot 2^4+C_3^5 2^2\cdot 2+C_2^5 2^2=164$

(3) $C_r^6 x6^{6-r}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^r=C^{6-r}\cdot x^{6-2r}\cdot(-1)^r$

常數項為 x^0，故 $6-2r=0$，即 $r=3$

$C^{6-3}(-1)^3=-20.$

48 巴斯卡公式

$C_k^n=C_{k-1}^{n-1}+C_k^{n-1}$，$1\leq k\leq n-1$.

1	C_0^0	$n=0$
1　1	C_0^1　C_1^1	$n=1$
1　2　1	C_0^2　C_1^2　C_2^2	$n=2$
1　3　3　1	C_0^3　C_1^3　C_2^3　C_3^3	$n=3$
1　4　6　4　1	C_0^4　C_1^4　C_2^4　C_3^4　C_4^4	$n=4$
1　5　10　10　5　1	C_0^5　C_1^5　C_2^5　C_3^5　C_4^5　C_5^5	$n=5$
1　6　15　20　15　6　1	C_0^6　C_1^6　C_2^6　C_3^6　C_4^6　C_5^6　C_6^6	$n=6$

例題

(1) 若 $C^n_{n-1}+C^n_2=28$，試求 n 值．

(2) 求 $C^2_2+C^3_2+C^4_2+\cdots+C^{10}_2$．

解

(1) $C^n_{n-1}+C^n_2=C^n_1+C^n_2=C^{n+1}_1=28$

故 $\dfrac{(n+1)}{2}=28$，解得 $n=7$

(2) $C^2_2+C^3_2+C^4_2+\cdots+C^{10}_2=C^3_3+C^3_2+C^4_2+\cdots+C^{10}_2-C^3_3$

$=C^4_3+C^4_2+\cdots+C^{10}_2-C^3_3$

$=\cdots=C^{10}_3+C^{10}_2-C^3_3$

$=C^{11}_3-1=164$

49 古典機率的定義

設一試驗的樣本空間為 S，且其樣本點個數為有限．若每一基本事件發生的機會均等，則事件 A 發生的機率為 $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$．

例題

一袋內裝有 5 顆紅球與 2 顆白球，今從袋中任取 1 球，若每球被選取的機會相等，試問取到紅球的機率為多少？

解

因為每一球被選取的機會相等，而紅球有 5 顆，白球有 2 顆，故樣本空間為

$S=\{$紅 1，紅 2，紅 3，紅 4，紅 5，白 1，白 2$\}$．

令事件 A 表示取出紅球的事件，所以

$A=\{$紅 1，紅 2，紅 3，紅 4，紅 5$\}$．

故可取到紅球的機率為 $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{5}{7}$．

50 機率的性質

所有的機率不論是古典機率、主觀機率還是客觀機率，對所有事件 A，B 皆有下列性質：

(1) $0 \leq P(A) \leq 1$.

(2) $P(S)=1$，$P(\varnothing)=0$.

(3) $P(A')=1-P(A)$.

(4) $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$.

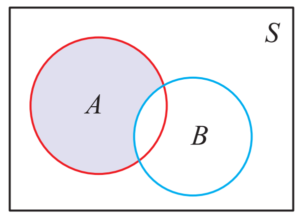
例題

班上 40 名學生的第一次月考成績，英文及格的有 20 人，數學及格的有 15 人，兩科都及格的僅有 10 人．校長從班上抽 1 人晤談，假設每人被抽中的機率均等．試求：

(1) 被抽中的學生至少有一科及格的機率．

(2) 被抽中的學生英文及格但數學不及格的機率．

解 令 A 表示英文及格的事件，B 表示數學及格的事件．由題意知



(1) $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$

$$=\frac{20}{40}+\frac{15}{40}-\frac{10}{40}$$

$$=\frac{25}{40}=\frac{5}{8}.$$

(2) 如右圖，依題意所求為 $P(A \cap B')$，可得

$$P(A \cap B')=P(A-B)$$

$$=P(A)-P(A \cap B)$$

$$=\frac{20}{40}-\frac{10}{40}=\frac{1}{4}.$$

例題

假設每個人出生在 12 個月分的機會均等．現在路上隨機挑 5 個人，會有人在相同月分出生的機率是多少？

解 令 S 表示樣本空間．每人出生的月分皆有 12 種可能，因此 $n(S)=12^5$.

令 A 表示 5 個人出生月分都不相同的事件，第一人有 12 種可能，

第二人剩下 11 種可能，…，以此類推，故 $n(A)=P_5^{12}$.

依題意要求的是 $P(A')$，即在同月出生的機率．故

$$P(A')=1-P(A)$$

$$=1-\frac{n(A)}{n(S)}$$

$$=1-\frac{P_5^{12}}{12^5}=\frac{89}{144} \quad (\approx 0.62).$$

51 期望值

已知 A_i，其中 $i=1, 2, \ldots, n$ 為樣本空間 S 的事件，且滿足以下兩個條件：

(1) 所有事件的聯集是整個樣本空間.

(2) 任兩個事件的交集是空集合.

設事件 A_i 發生的機率為 p_i，其中 $i=1, 2, \cdots, n$．若事件 A_i 發生可得值 m_i，其中 $i=1, 2, \ldots, n$，則我們定義得值的期望值為

$$m_1\times p_1+m_2\times p_2+\cdots+m_n\times p_n.$$

例題

學生參加校外教學參訪活動，投保某保險公司的旅遊意外平安險，其發生意外致死的理賠額度為 100 萬元，保險費為 40 元．依過去經驗，在參訪途中發生意外致死的機率為 0.00001，若不計其他營運成本，試求保險公司獲利的期望值.

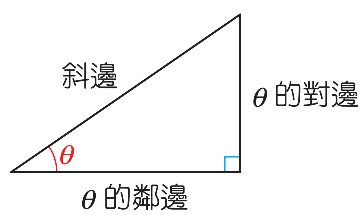
解 由題意知保險公司可能賺 40元或賠999960（$=40-1000000$）元，故所求的期望值為

$$\begin{aligned}E&=40\times0.99999+(-999960)\times0.00001\\&=40\times0.99999+(40-1000000)\times0.00001\\&=40\times1-1000000\times0.00001\\&=30,\end{aligned}$$

即保險公司獲利的期望值為30元.

52 直角三角形的三角比

如圖所示，當 θ 為一銳角，可以畫出一個三個角為 θ, $90°-\theta$, $90°$ 的直角三角形．我們定義如下的三角比：



$\sin\theta=\dfrac{\theta\text{ 的對邊長}}{\text{斜邊長}}$，稱為 θ 的**正弦**.

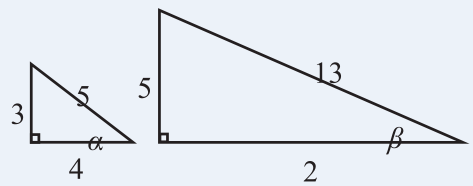
$\cos\theta=\dfrac{\theta\text{ 的鄰邊長}}{\text{斜邊長}}$，稱為 θ 的**餘弦**.

$\tan\theta=\dfrac{\theta\text{ 的對邊長}}{\text{斜邊長}}$，稱為 θ 的**正切**.

θ \ 值	30°	45°	60°
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

例題

已知兩個直角三角形三邊長分別為 3，4，5、5，12，13，α，β 分別為它們的一角，如下圖所示．
試選出正確的選項．



(1) $\sin\alpha>\sin\beta>\sin 30°$
(2) $\sin\alpha>\sin 30°>\sin\beta$
(3) $\sin\beta>\sin\alpha>\sin 30°$
(4) $\sin\beta>\sin 30°>\sin\alpha$
(5) $\sin 30°>\sin\alpha>\sin\beta$ 〔109 A〕

解 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\sin\beta=\frac{5}{13}$，$\sin 30°=\frac{1}{2}$

故 $\sin\alpha>\sin 30°>\sin\beta$

(2) 正確．

53 同界角

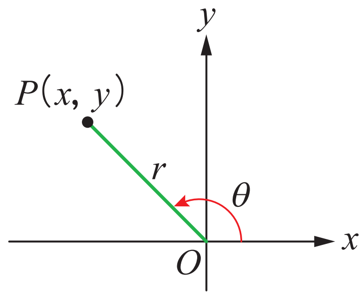
如若廣義角 θ 與 ϕ 的差為 360° 的整數倍，即 $\theta-\phi=360°\cdot n$，其中 n 為整數，
則稱 θ 與 ϕ 互為同界角．
例如：485°，845°，$125°+360°\,n$ 以及 $-235°$，$-235°-360°$ 等皆是 125° 的同界角．

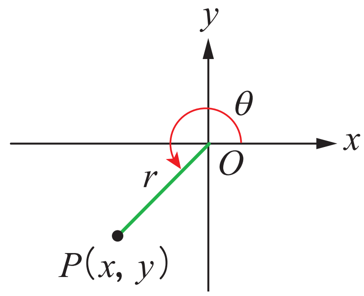
54 廣義角的三角比

如下圖所示，設 θ 是一個標準位置角，在 θ 的終邊上任取一點 $P(x, y)$，

且 $\overline{OP}=\sqrt{x^2+y^2}=r$（其中 $r>0$），我們定義

$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$，$\cos=\dfrac{x}{r}$，$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$（$x\neq 0$）





例題

試求 $\sin 120°$，$\cos 120°$，$\tan 120°$ 的值.

解

如右圖，在 $120°$ 的終邊上取一點 P，使得 $\overline{OP}=2°$

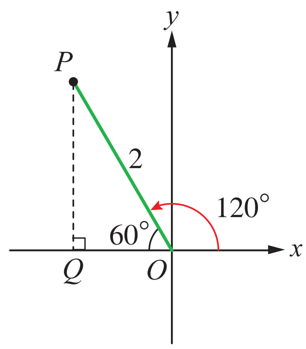
由 P 點向 x 軸作垂線，垂足為 Q 點，則直角三角形 OPQ 中，

$\angle POQ=60°$. 因 $\overline{OP}=2$，故

$$\overline{OQ}=1,\ \overline{PQ}=3,$$

所以點 $P(-1, \sqrt{3})$. 故得 $\sin 120°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos 120°$

$$=-\frac{1}{2}\ \tan 120°=-\sqrt{3}.$$



55 商數關係、平方關係及餘角關係

（商數關係）$\theta\neq 90°$，$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}==\tan\theta$.

（平方關係）設 $0°<\theta<90°$，則 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$.

（餘角關係）$\sin(90°-\theta)=\cos\theta$，$\cos(90°-\theta)=\sin\theta$.

例題

(1) 試求 $\sin^2 37°+\cos^2 37°$ 的值.

(2) 設 θ 為銳角，已知 $\sin\theta=\dfrac{1}{3}$，試求 $1-\cos^2\theta$ 的值.

解

(1) $\sin^2 37°+\cos^2 37°=1$

(2) 由 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 得 $1-\cos^2\theta=\sin^2\theta=(\dfrac{1}{3})^2=\dfrac{1}{9}$

例題

已知 $0°<\theta<90°$，且 $\cos\theta=\frac{5}{7}$，試求 $\sin\theta$ 與 $\tan\theta$ 的值.

解

因 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，故 $(\frac{5}{7})^2+\sin^2\theta=1$

得 $\sin^2\theta=\frac{24}{49}$ 即 $\sin\theta=\frac{2\sqrt{6}}{7}$

再由 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ 得 $\tan\theta=\frac{\frac{2\sqrt{6}}{5}}{\frac{5}{7}}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$

56 $-\theta$ 關係、$180°-\theta$ 關係、$90°-\theta$ 關係

對於任意角 θ，都有

(1) $\sin(-\theta)=-\sin\theta$,

$\cos(-\theta)=\cos\theta$,

$\tan(-\theta)=-\tan\theta$.（$\theta$ 的終邊不在 y 軸上時）

(2) $\sin(180°-\theta)=\sin\theta$,

$\cos(180°-\theta)=-\cos\theta$,

$\tan(180°-\theta)=-\tan\theta$.（當角 θ 的終邊不在 y 軸上時）

(3) $\sin(90°-\theta)=\cos\theta$，$\cos(90°-\theta)=\sin\theta$.

例題

已知 $\sin\theta=0.7$. 值試求下列各值：

(1) $\sin(-\theta)$.

(2) $\sin(180°-\theta)$.

(3) $\cos(90°+\theta)$.

解

(1) 由 $-\theta$ 關係得 $\sin(-\theta)=-\sin\theta=-0.7$.

(2) 由 $180°-\theta$ 關係得 $\sin(180°-\theta)=\sin\theta=0.7$.

(3) 由 $180°-\theta$ 及 $90°-\theta$ 關係得 $\cos(90°+\theta)=-\sin\theta=-0.7$.

57 極坐標

給定平面上的一點 O 及以 O 為始點的射線 L. 對於平面上異於 O 的任一點 P, 若 $\overline{OP}=r$, 且以 L 為始邊, 射線 $\overline{OP}$ 為終邊的廣義角為 θ, 則 $[r, \theta]$ 稱為 P 點的一個極坐標, 記為 $P[r, \theta]$.

58 直角坐標與極坐標的轉換

(1) 若 P 點的極坐標為 $[r, \theta]$, 則直角坐標為

$(x, y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

(2) 若 P 點不是原點且直角坐標為 (x, y), 則極坐標為 $=[r, \theta]$,

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\cos\theta=\dfrac{x}{r}$, $\sin\theta=\dfrac{y}{r}$,

例題

(1) 已知 P 點的極坐標為 $[4, 120°]$, 試求 P 點的直角坐標.

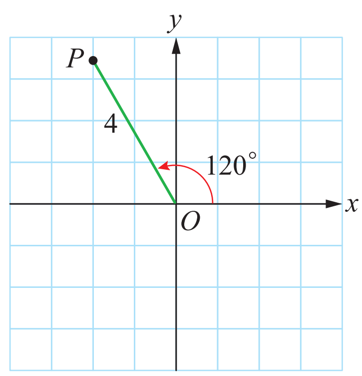
(2) 已知 Q 點的直角坐標為 $(-2, -2)$, 試求 Q 點的極坐標.(角度介於 0° 到 360° 之間)

解

(1) 設 P 點的直角坐標為 (x, y),

因為 $r=4$, $\theta=120°$, 所以

$$\begin{aligned}(x, y)&=(4\cos 120°, 4\sin 120°),\\&=\left(4\times\left(-\frac{1}{2}\right), 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\&=(-2, 2\sqrt{3}),\end{aligned}$$



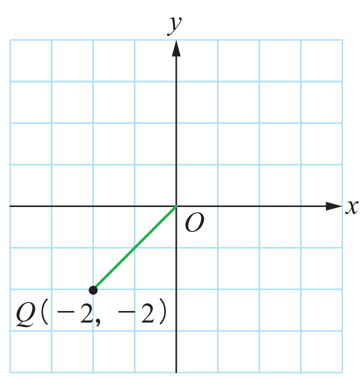
故 P 點的直角坐標為 $(-2, 2\sqrt{3})$.

(2) 設 Q 點的極坐標為 $[r, \theta]$,

$$r=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}, \text{ 則}$$

$$\cos\theta=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\sin\theta=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}},$$



所以 $\theta=225°$,

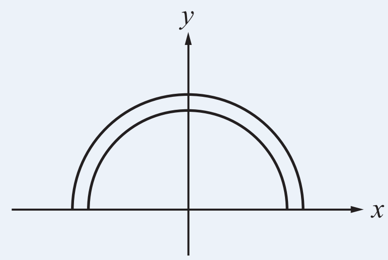
故 Q 點的極坐標為 $[22, 225°]$.

例題

某甲欲用一支長度為 1 的筆直掃描棒來掃描此環狀區域之.軸上方的某區域 R. 他設計掃描棒黑、白兩端分別在半圓 C^1：$x^2+y^2=3(y\geq 0)$、C^2：$x^2+y^2=4(y\geq 0)$ 上移動.

開始時掃描棒黑端在點 A $(\sqrt{3},\ 0)$. 白端在 C^2 的點 B.

接著黑、白兩端各沿著 C_1、C_2 逆時針移動，直至白端碰到 C^2 的點 B' $(-2,\ 0)$ 便停止掃描. 令 O 為原點，掃描棒停止時黑、白兩端所在位置分別為 A'，B'. 求：



(1) $\cos\angle OA'B'$

(2) A' 的極坐標.

〔111 學測數 A 修〕

解

(1) 如圖 $\triangle OA'B'$ 中

$\overline{OA'}=\sqrt{3}$，$\overline{OB'}=2$，$\overline{A'B'}=1$

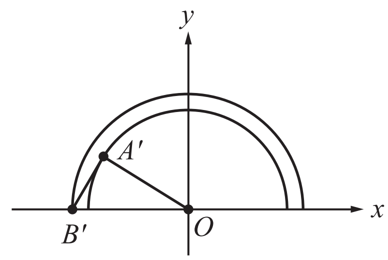
故 $\angle OA'B'=90°$，

得 $\cos\angle OA'B'=0$

(2) $\angle A'OB'=30°$ $(1-2-\sqrt{3})$. 故 $\angle AOA'=180°-30°$

且 $\overline{OA'}=\sqrt{3}$

故 A' 極坐標為 $[\sqrt{3},\ 150°]$.



59 三角形面積公式

若 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的對邊邊長分別為 a、b、c，則

$$\triangle ABC\text{ 面積}=\frac{1}{2}bc\ \sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C.$$

例題

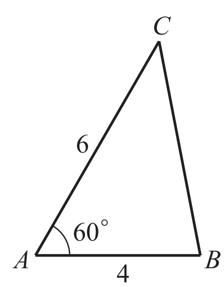
$\triangle ABC$ 中，若 $\overline{AB}=4$，$\overline{AC}=6$，且 $\angle A=60°$，試求 $\triangle ABC$ 的面積.

解

如圖所示，由三角形面積公式得

$$\triangle ABC\text{ 面積}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4\cdot \sin 60°$$

$$=6\sqrt{3}.$$



60 正弦定理

若 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的對邊邊長分別為 a、b、c，且 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑為 R，

則：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$.

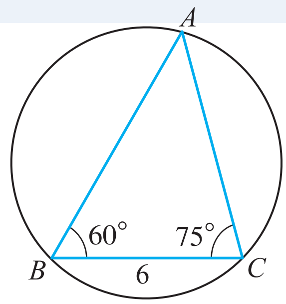
例題

$\triangle ABC$ 中，若 $\angle B=60°$，$\angle C=75°$，且 $\overline{BC}=6$，試求：

(1) $\overline{AC}$ 的長度.

(2) $\triangle ABC$ 的外接圓半徑.

解



(1) 因為 $\angle A=180°-\angle B-\angle C$

$=180°-60°-75°=45°$.

如圖所示，所以由正弦定理得

$$\frac{\overline{AC}}{\sin 60°}=\frac{\overline{BC}}{\sin 45°}=2R,$$

即 $\overline{AC}=\sin 60°\cdot\dfrac{\overline{BC}}{\sin 45°}$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{6}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=3\sqrt{6}.$$

(2) 由 $2R=\dfrac{\overline{BC}}{\sin 45°}=\dfrac{6}{\frac{\sqrt{2}}{2}}==6\sqrt{2}$,

得 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑 $R=3\sqrt{2}$.

61 餘弦定理

若 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的對邊邊長分別為 a、b、c，則：

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$,

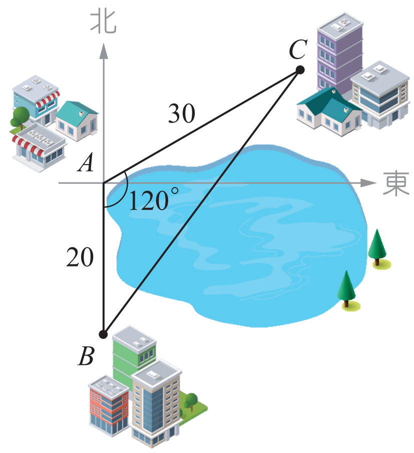
$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

例題

城市 B 與 C 中間隔了一個湖泊，小珊測出兩城市 B 與 C 分別在城市 A 的正南方與 30° 北方向（即由東方往北轉 30° 的方向），若已知 A, B 兩城市的距離是 20 公里，A, C 兩城市的距離是 30 公里，試求 B, C 兩城市的距離.

解

A, B, C 三城市所在位置如圖所示，



由餘弦定理得

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\cos120^\circ$$
$$=20^2+30^2-2\cdot20\cdot30\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$=400+900+600$$
$$=1900,$$

所以 $\overline{BC}=10\sqrt{19}$. 兩城市的距離是 $10\sqrt{19}$（約 43.6）公里.