【封面】113下翰林數學 新學測公式集數B / 紙質：特銅 120磅 / 無線膠裝 / G8K模大：43.6×30.3 cm / 88%列印

翰林數學

歷屆試題
實戰檢測

翰林數學

Suit you
你的合身教材

114學測公式集

新綱學測重要公式+練習題

高二B

快充學測・快衝大學

3年完整電子檔
純公式電子檔

翰林 相信學習 Believe in Learning
96330012-33

【封裡】113下翰林數學 新學測公式集數B / 紙質：特銅 120磅 / 無線膠裝 / G8K模大：43.6×30.3 cm / 88%列印

114學測公式集 前言與目錄

本文精選整理高中數學【數 B 第 3 冊與第 4 冊】的核心公式，旨在幫助同學快速回顧重要內容，提高複習效率，並強化關鍵概念，是學習和備考的得力助手！

數B 第3冊

數B 第4冊

快充學測・快衝大學

40 乘法反方陣

1. 設 A 是一個 n 階方陣，若存在 n 階方陣 B 滿足 $AB=BA=I_n$，則稱 B 是 A 的乘法反方陣，以符號 A^{-1} 表示．
2. 二階乘法反方陣的公式

若二階方陣 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 的行列式 $\det A\neq 0$，則 A 有乘法反方陣 A^{-1}，

且 $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}=\dfrac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$．

若 $\det A=0$，則 A 沒有乘法反方陣．

例題

若 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & s \\ y & t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，試求矩陣 $\begin{bmatrix} x & s \\ y & t \end{bmatrix}$．

解

$$\begin{bmatrix} x & s \\ y & t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & s \\ y & t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{5-4}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

1 弳

若一圓的半徑為 r, 則弧長 s 所對應的圓心角 $\theta=\frac{s}{r}$ 弳.

由 $180°=\pi$ 弳, 可得

$1°=\frac{\pi}{180}$ 弳 ≈ 0.01745 弳, 1 弳 $=\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}\approx 57.3°$.

例題

請將下表完成:

度	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$135°$	$180°$	$210°$	$240°$	$270°$	$360°$
徑	0徑	$\frac{\pi}{6}$ 徑		$\frac{\pi}{3}$ 徑		$\frac{3\pi}{4}$ 徑	π 徑	$\frac{7\pi}{6}$ 徑		$\frac{3\pi}{2}$ 徑	

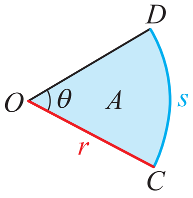
解

$45°=\frac{45}{180}\pi=\frac{\pi}{4}$ 徑　　$90°=\frac{90}{180}\pi=\frac{\pi}{2}$ 徑

$240°=\frac{240}{180}\pi=\frac{4}{3}\pi$ 徑　　$360°=\frac{360}{180}\pi=2\pi$ 徑

2 扇形的弧長與面積公式

已知圓半徑為 r, 扇形 COD 的圓心角 $\angle COD=\theta$（弳）, $0\leq\theta<2\pi$, 如圖,
令扇形的弧長為 s, 面積為 A, 則:



⑴ 扇形的弧長 $s=r\theta$.

⑵ 扇形的面積 $A=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}rs$

例題 1

已知一扇形半徑為 6 公分, 圓心角為 120°, 試求此扇形的弧長及面積.

解

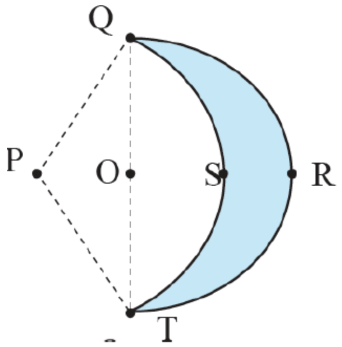
圓心角 $\frac{120}{180}\pi=\frac{2\pi}{3}$

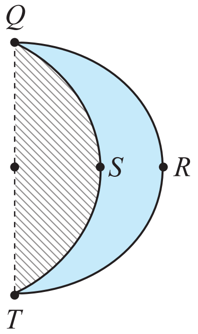
故弧長 $6\cdot\frac{2\pi}{3}=4\pi$（公分）

面積 $\frac{1}{2}\cdot 6^2\cdot\frac{2\pi}{3}=12\pi$（平方公分）

例題 2

有一款設計圖：圖中，圓弧 QRT 是一個以 O 點為圓心、$\overline{QT}$ 為直徑的半圓，$\overline{QT}=2\sqrt{3}$. 圓弧 QST 的圓心在 P 點，$\overline{PQ}=\overline{PT}=2$. 求圓弧 QRT 與圓弧 QST 所圍出的灰色區域 $QRTSQ$ 的面積. 〔109 學測修〕





解

圓弧QRT面積＝半圓面積－斜線區域面積

斜線區域面積＝扇形 $QSTP$ 面積－△OPT 面積

半圓面積$=\frac{1}{2}\times\pi\times\sqrt{3}^2=\frac{3\pi}{2}$

扇形 $QSTP$ 面積$=\frac{120°}{360°}\cdot\pi\cdot 2^2=\frac{4}{3}\pi$

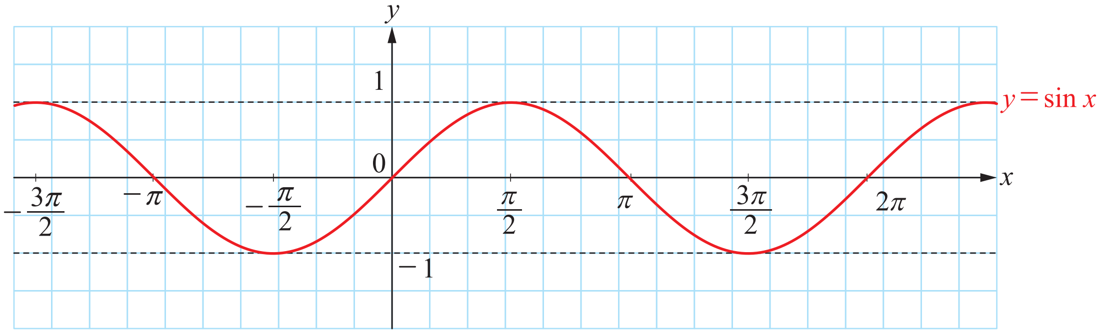
△OPT 面積$=\frac{1}{2}\times1\times2\sqrt{3}=\sqrt{3}$

故 $QRTSQ$ 的面積$=\frac{3\pi}{2}-\left(\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}\right)$

$=\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$（平方單位）

3 正弦函數

正弦函數 $y=\sin x$ 的圖形如下圖，



且具有以下的性質：

(1) 定義域為所有實數

(2) 值域為區間 [-1, 1]

(3) 振幅為1.

(4) 週期為2π.

(5) 圖形對稱於原點.

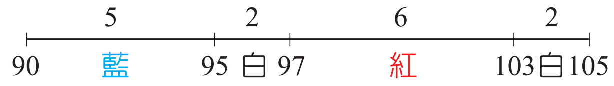
例題

某燈會布置變色閃燈，每次啟動後的閃燈顏色會依照以下的順序做週期性變換：藍－白－紅－白－藍－白－紅－白－藍－白－紅－白…，每四次一循環，其中藍光每次持續 5 秒，白光每次持續 2 秒，而紅光每次持續 6 秒．假設換燈號的時間極短可被忽略，試選出啟動後第 99 至 101 秒之間的燈號．

(A)皆為藍燈
(B)皆為白燈
(C)皆為紅燈
(D)先亮藍燈再亮白燈
(E)先亮白燈再亮紅燈

解 藍－白－紅－白一個週期為 $5+2+6+2=15$ 秒

$15\times6=90$，故 99～101 秒落在第 7 週期



故 99～101 皆為紅燈

4　正弦函數 $y=\sin x$ 圖形的平移

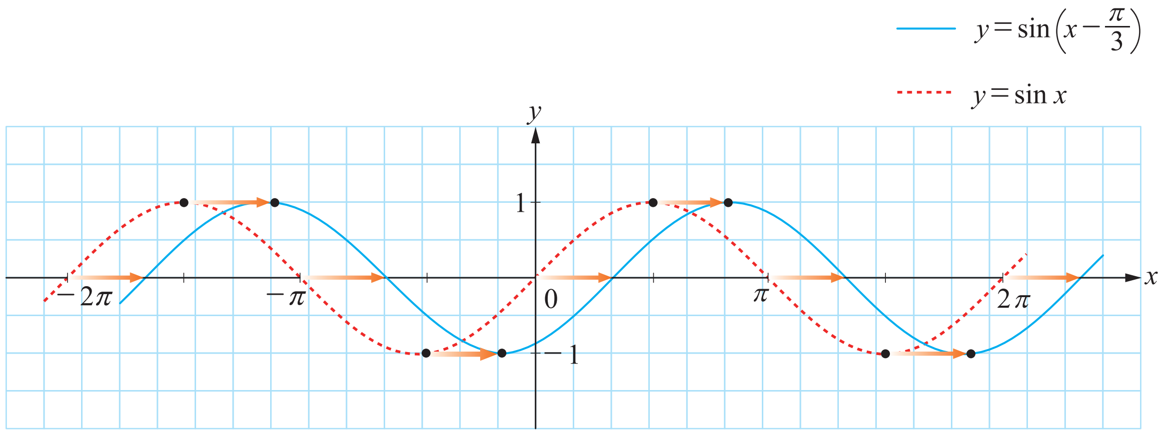
設 $h,\ k>0$．

(1) 函數 $y=\sin x+k$ 的圖形是將 $y=\sin x$ 的圖形向上平移 k 個單位長．
(2) 函數 $y=\sin x-k$ 的圖形是將 $y=\sin x$ 的圖形向下平移 k 個單位長．
(3) 函數 $y=\sin(x+h)$ 的圖形是將 $y=\sin x$ 的圖形向左平移 h 個單位長．
(4) 函數 $y=\sin(x-h)$ 的圖形是將 $y=\sin x$ 的圖形向右平移 h 個單位長．

例題

試利用 $y=\sin x$ 的圖形描繪出 $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的函數圖形．

解 $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的圖形可由 $y=\sin x$ 的圖形向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 個單位長而得．



5 正弦函數 $y=\sin x$ 圖形的伸縮

設 $a>0$.

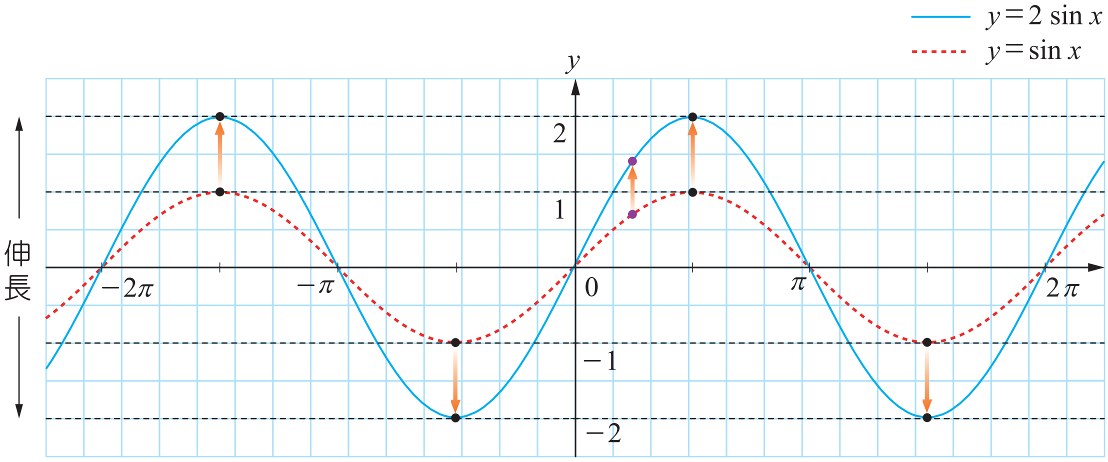
⑴ 函數 $y=a\sin x$ 的圖形是將 $y=\sin x$ 的圖形上每一點的縱坐標都乘上 a 倍而得.

⑵ 函數 $y=\sin ax$ 的圖形是將 $y=\sin x$ 的圖形上每一點的橫坐標都乘上 $\frac{1}{a}$ 倍而得.

例題 1

試利用 $y=\sin x$ 的圖形描繪出 $y=2\sin x$ 的函數圖形.

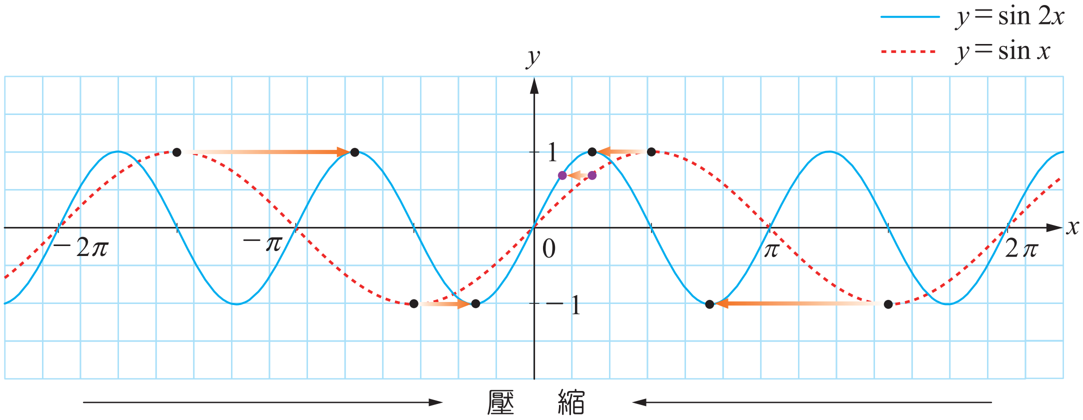
解 $y=2\sin x$ 的圖形是將 $y=\sin x$ 的圖形上每一點的縱坐標都乘上 2 倍而得.



例題 2

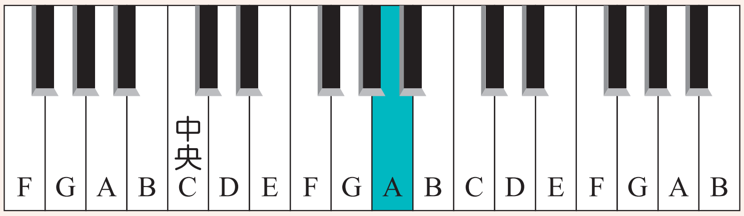
試利用 $y=\sin x$ 的圖形描繪出 $y=\sin 2x$ 的函數圖形.

解 $y=\sin 2x$ 的圖形是將 $y=\sin x$ 的圖形上每一點的橫坐標都乘上 $\frac{1}{2}$ 倍而得.



例題3

在音樂理論上，規定 A4（音樂課唱的 la）的音高稱為標準音高．A4 的位置如圖所示．



已知這個音的聲波函數是 $f(x)=\sin(880\pi x)$，x 的單位為秒．試求：

(1) 此函數的週期為何？

(2) 此函數的頻率為何？

解 (1) 由正弦函數圖形的伸縮可知週期為

$$\frac{2\pi}{880\pi}=\frac{1}{440}\ (\approx 0.0023)(\text{秒 / 次}).$$

(2) 因為頻率為週期的倒數，故頻率為 440 赫茲．

6(1) 指數函數

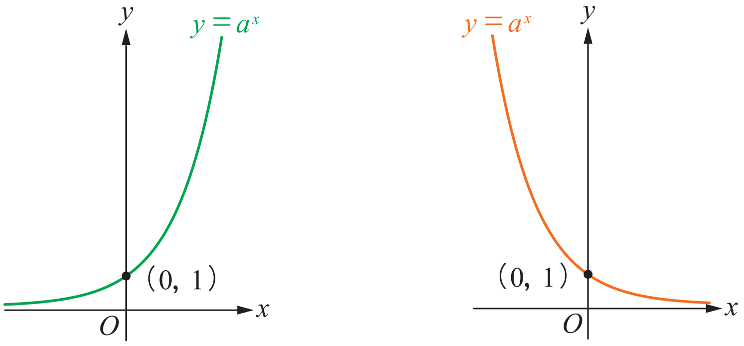
設 $a>0$，且 $a\neq 1$，則稱函數 $f(x)=a^x$ 是以 a 為底的指數函數．

6(2) 指數函數的定義域與值域

設 $a>0$，且 $a\neq 1$，則指數函數 $f(x)=a^x$ 的定義域為所有實數，且值域為所有正實數．

6(3) 指數函數圖形

設 $a>0$，且 $a\neq 1$，則函數 $y=a^x$ 的圖形如下：



(a) $a>1$ (b) $0<a<1$

例題 1

某實驗室發現其培養的細菌在經過 x 分鐘後，細菌總數約有 $f(x)=20000\times10^{0.08x}$ 個，試求：

(1) 一開始時（$x=0$）有多少個細菌？

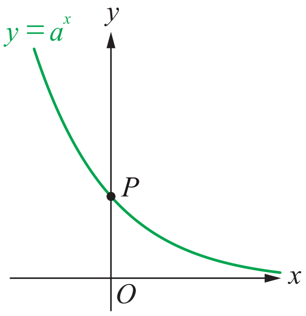
(2) 試以科學記號 $b\times10^{n}$ 表示經過一小時後約有多少個細菌？（$10^{0.8}\approx6.3$）

解

(1) $f(0)=20000\times10^{0}=20000$ 個

(2) $f(60)=20000\times10^{0.08\times60}=2\times10^{4}\times10^{4.8}=2\times10^{0.8}\times10^{8}=2\times6.3\times10^{8}=1.26\times10^{9}$

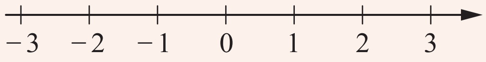
例題 2



右圖為某指數函數 $y=a^{x}$ 的圖形，試回答下列問題：

(1) 試求 P 點的坐標.

(2) 在數線上標示 a 值可能的最大範圍.

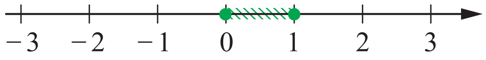


解

(1) $a^{0}=1$　故 P 點坐標為（0, 1）

(2) 由指數函數遞減知 $0<a<1$

故



7 常用對數的性質

設 $r,\ s>0$，t 為實數，則：

(1) $\log r+\log s=\log rs$.

(2) $\log r-\log s=\log\dfrac{r}{s}$.

(3) $\log r^{t}=t\log r$.

例題 1

試利用常用對數的性質求下列各值：

(1) $\log 4+\log 25$.　(2) $\log 30^{3}-\log 27$.　(3) $\log 100^{21}$.

解

(1) $\log 4+\log 25=\log(4\times 25)$ （常用對數性質(1)）

$=\log 100=2$.

(2) $\log 30^{3}-\log 27=\log\dfrac{30\times 30\times 30}{27}$ （常用對數性質(2)）

$=\log 1000=3$.

(3) $\log 100^{21}=21\log 100$ （常用對數性質(3)）

$=21\times 2=42$.

例題 2

若 a, b 是整數且 $a\log 2+b\log 5=1$，試求 a, b 之值.

解

$\log 2^{a}+\log 5^{b}=\log 10$

化簡得 $\log(2^{a}\times 5^{b})=\log 10$

故 $2^{a}\times 5^{b}=10=2\times 5$，因此 $a=1$，$b=1$

8 一般對數

設 $a>0$，$a\neq 1$，且 $r>0$. 若滿足 $a^{b}=r$，則稱 b 為以 a 為底時，r 的對數，記作 $b=\log_{a}r$，其中 a 稱為底數，r 稱為真數.

9 換底公式

設 $a>0$，且 $a\neq 1$，對於任意正數 r，均有 $\log_{a}r=\dfrac{\log r}{\log a}$.

例題

試利用換底公式將下列數值以 log2 或 log3 表示.

(1) $\log_2 200$.　　(2) $\log_3 5$.

解

(1) $\log_2 200=\dfrac{\log 200}{\log 2}=\dfrac{\log(100\times 2)}{\log 2}=\dfrac{\log 100+\log 2}{\log 2}=\dfrac{2+\log 2}{\log 2}$.

(2) $\log_3 5=\dfrac{\log 5}{\log 3}=\dfrac{\log\dfrac{10}{2}}{\log 3}=\dfrac{\log 10-\log 2}{\log 3}=\dfrac{1-\log 2}{\log 3}$.

10 對數函數

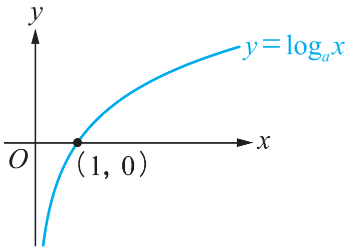
(1) 設 $a>0$, $a\neq 1$, 且 x 是任意正實數, 則函數

$$f(x)=\log_a x$$

稱為以 a 為底的對數函數, 其中定義域為所有正實數, 值域為所有實數.

(2) 對數函數 $y=\log_a x(a>1)$ 的圖形特徵

設 $a>1$, 則函數 $y=\log_a x$ 的圖形如圖, 且具有下列性質.



(3) 圖形永遠在 y 軸的右側.

(4) 圖形通過點 (1, 0).

(5) 圖形由左而右逐漸上升, 且上升得愈來愈慢.

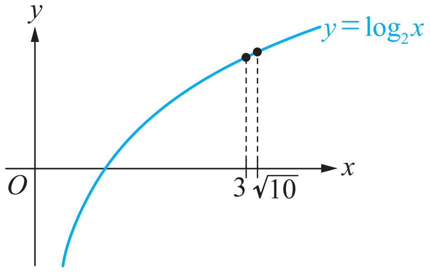
(6) 當 x 值愈接近0, 函數值愈小, 圖形愈接近 y 軸

(7) 圖形凹口向下.

例題 1

設 $a=\log_2 3$, $b=\log_4 10$, 試利用對數函數的圖形比較 a, b 兩數的大小關係.

解



先將 a, b 兩數均表成底數為 2 的對數:

$a=\log_2 3$,

由換底公式及常用對數的性質可知,

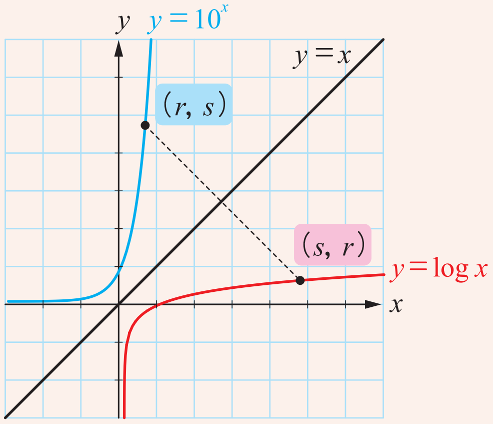
$b=\log_4 10=\dfrac{\log 10}{\log 4}=\dfrac{\log 10}{2\log 2}$

$=\dfrac{\dfrac{1}{2}\log 10}{\log 2}=\dfrac{\log\sqrt{10}}{\log 2}=\log_2\sqrt{10}$,

因為 $3<\sqrt{10}$ 因此, $\log_2 3<\log_2\sqrt{10}$, 即 $a<b$.

例題2

$y=10^x$ 和 $y=\log x$ 兩個圖形對稱於直線 $y=x$



11 單利與複利

設本金為 a，每期利率為 r.

(1) 以單利孳息，經過 n 期後，本利和為 $a(1+nr)$.

(2) 以複利孳息，

每年的本利和是前一期的（$1+r$）倍，故 n 期後的本利和是

$$\underbrace{a(1+r)(1+r)\cdots\cdots(1+r)}_{n\text{ 個}}=a(1+r)^n.$$

(3) 零存整付，

複利計算下，n 期可以領回的本利和為

$$a(1+r)^n+a(1+r)^{n-1}+\cdots\cdots+a(1+r)^2+a(1+r)$$

$$=a(1+r)\times\frac{(1+r)^n-1}{\mathrm{r}}\text{（元）}$$

例題

小明每年固定購買某基金 10 萬元，在年報酬率 8%且以複利計息的情況下，他至少需要多少年，才可以累積到人生的第一桶金 100 萬元？（無條件進入至整數位）

解 設 n 年後，他的本利和超過 100 萬，故

$$10\times1.08\times\frac{(1.08)^n-1}{0.08}\geq100,$$

化簡得 $(1.08)^n\geq1.74074074$.

不等式的兩邊同時取常用對數，其大小關係並無改變，得

$n\times\log1.08\geq\log1.74074074$，所以

$$n\geq\frac{\log 1.74074074}{\log1.08}\approx7.202484882,$$ 因此，最少需 8 年.

12 七二法則

這是一種簡易估算的方法其公式如下：若每期利率為 $x\%$ 且以複利計算，則本利和達到原來本金的兩倍所需時間大約要 $\frac{72}{x}$ 期.

例題

將 100 萬元存入年利率 3%，每年複利計息一次的銀行，試利七二法則估算大約需多少年後本利和才會達到 200 萬元？（無條件進入至整數位）

解

以七二法則估計，約需 $\frac{72}{3}=24$ 年.

若以計算機計算 $(1+3\%)^{23}=(1.03)^{23}\doteqdot 1.97$，$(1.03)^{24}=2.03$

此結果與七二法則相當.

13(1) 向量的長度

坐標平面上的任意一個向量 $\vec{v}=(x,\ y)$，則 $|\vec{v}|=\sqrt{x^2+y^2}$ 為 $\vec{v}$ 的長度.

13(2) 兩點決定一個向量的坐標表示法

若 A、B 兩點的坐標分別為 $(a_1,\ a_2)$、$(b_1,\ b_2)$，則
$\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2)$.

13(3) 向量加法的坐標表示法

設 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$，則 $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$.

13(4) 向量減法的坐標表示法

若 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$，則：

(a) $-\vec{a}=(-a_1,\ -a_2)$.

(b) $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$.

例題 1

設坐標平面上相異兩點 $P(-2,5)$，Q. 已知 $\overrightarrow{PQ}=(-4,3)$，試求：

(1) $|\overrightarrow{PQ}|$.　　(2) Q 點坐標.

解

(1) $|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$

(2) 設 Q 坐標 (x,y)

則 $\overrightarrow{PQ}=(x-(-2),y-5)$

故 $\begin{cases}x+2=-4\\y-5=3\end{cases}$ 得 $x=-6$, $y=8$

例題 2

在坐標平面上，已知向量 $\overrightarrow{PQ}=\left(\log\frac{1}{5},-10^{-5}\right)$，其中點 P 的坐標為 $\left(\log\frac{1}{2},2^{-5}\right)$. 試選出正確的選項.

(A)點 Q 在第一象限　(B)點 Q 在第二象限

(C)點 Q 在第三象限　(D)點 Q 在第四象限

(E)點 Q 位於坐標軸上　〔111 學測數 B〕

解

設 Q 坐標 (x,y)，則 $\overrightarrow{PQ}=\left(x-\log\frac{1}{2},y-2^{-5}\right)=\left(\log\frac{1}{5},-10^{-5}\right)$

得 $\begin{cases}x-\log\frac{1}{2}=\log\frac{1}{5}\\y-2^{-5}=-10^{-5}\end{cases}$

解得 $x=\log\frac{1}{2}+\log\frac{1}{5}=-1<0$

$y=2^{-5}-10^{-5}>0$

故 Q 在第二象限

14 向量的線性組合

若 $\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 為平面上兩個不平行的非零向量，則平面上任意一個向量 $\overrightarrow{OP}$ 必能唯一表成

$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$

的形式，其中 x, y 為實數.

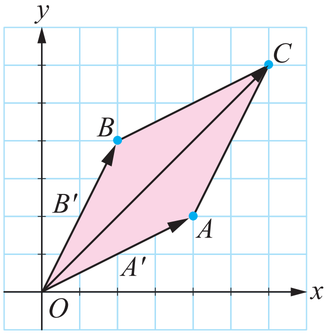
例題

設向量 $\overrightarrow{OA}=（2, 1）$，$\overrightarrow{OB}=（1, 2）$，若 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，且 $0\leq x\leq 1$，$0\leq y\leq 1$，x，y 為實數，試在平面上標示出所有 P 點所形成的區域.

解

令 $\overrightarrow{OA'}=x\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB'}=y\overrightarrow{OB}$，因為 $0\leq x\leq 1$，所以點 A' 必落在 $\overrightarrow{OA}$ 上．同理，點 B' 也必落在 $\overrightarrow{OB}$ 上.

$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}$，故 $OA'PB'$ 形成平行四邊形．從而得知點 P 必定位於平行四邊形 $OACB$ 及其內部



15 分點公式

設 P 點是線段 $\overline{AB}$ 上的點，且滿足 $\overline{PA}:\overline{PB}=m:n$，則對平面上任一點 O，

$$\overrightarrow{OP}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}.$$

例題

設 $A(3,\ -6)$，$B(-7,\ 9)$ 為平面上相異兩點，P 為 $\overline{AB}$ 上一點，且滿足 $\overline{AP}:\overline{BP}=3:2$，試求 P 點的坐標.

解

如圖所示.

因為 P 點在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AP}:\overline{BP}=3:2$，

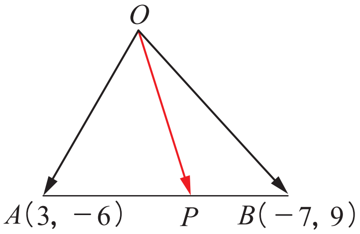
取 O 為原點，可得 $\overrightarrow{OA}=（3, -6）$，

$\overrightarrow{OB}=（-7, 9）$，由分點公式

$$\overrightarrow{OP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{OB}=\frac{2}{5}（3, -6）+\frac{3}{5}（-7, 9）$$

$=（-3, 3）$，

故得 P 點的坐標為 $（-3, 3）$.



16 平面向量的內積

⑴ 坐標平面上兩向量 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ 的內積為

$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$.

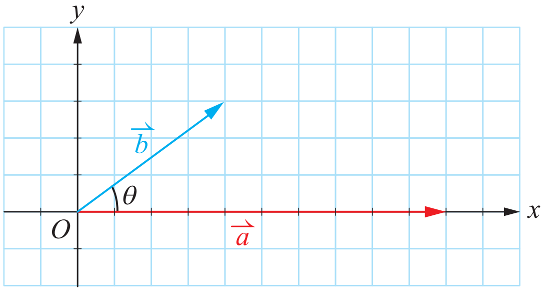
⑵ 坐標平面上兩非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的內積為 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$，其中 θ 為 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角，

例題 1

如圖，已知 $\vec{a}=(a_1, a_2)=(10, 0)$，$\vec{b}=(b_1, b_2)=(4, 3)$，試計算：

(1) $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=$__________________.

(2) $a_1b_1+b_2b_2=$__________________.



解

(1) $|\vec{a}|=10$, $|\vec{b}|=\sqrt{4^2+3^2}=5$, $\cos\theta=\frac{4}{5}$

$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=10\cdot 5\cdot\frac{4}{5}=40$

(2) $10\cdot 4+0\cdot 3=40$

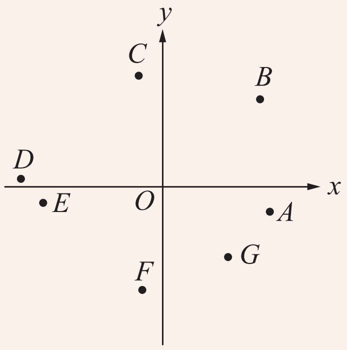
例題 2

考慮坐標平面上的點 $O(0, 0)$、A、B、C、D、E、F、G，如右圖所示：

其中 B 點、C 與 D 點、E 與 F 點、G 與 A 點依序在一、二、三、四象限內。若 $\vec{v}$ 為坐標平面上的向量，且滿足 $\vec{v}\cdot\overrightarrow{OA}>0$ 及 $\vec{v}\cdot\overrightarrow{OB}>0$，則 $\vec{v}$ 與下列哪些向量的內積一定小於 0？

(A) $\overrightarrow{OC}$　(B) $\overrightarrow{OD}$　(C) $\overrightarrow{OE}$　(D) $\overrightarrow{OF}$　(E) $\overrightarrow{OG}$

（111 學測數 B）



解

因 $\vec{v}\cdot(-\overrightarrow{OA})=-\vec{v}\cdot\overrightarrow{OA}<0$

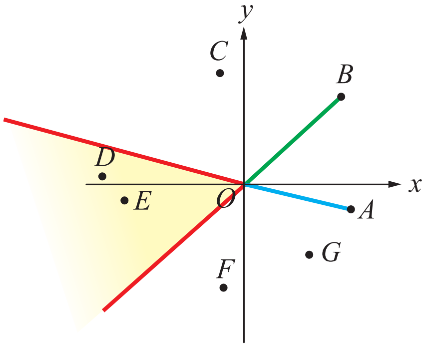
$\vec{v}\cdot(-\overrightarrow{OB})=-\vec{v}\cdot\overrightarrow{OB}<0$

因此在 $-\overrightarrow{OA}$, $-\overrightarrow{OB}$ 方面之間的向量可表示成

$\alpha(-\overrightarrow{OA})+\beta(-\overrightarrow{OB})$, $\alpha, \beta>0$

$\vec{v}\cdot(\alpha(-\overrightarrow{OA})+\beta(-\overrightarrow{OB}))=-\alpha\vec{v}\cdot\overrightarrow{OA}-\beta\vec{v}\cdot\overrightarrow{OB}<0$

故 $\overrightarrow{OD}$、$\overrightarrow{OE}$ 符合



17 兩向量垂直的判定法則

設 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 為兩個非零平面向量，則：

(1) 若 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 互相垂直，則 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

(2) 若 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，則 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 互相垂直.

例題

試判斷下列各小題中的 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 兩向量是否垂直？

(1) $\vec{a}=(1,\ 3)$，$\vec{b}=(-3,\ 1)$．

(2) $\vec{a}=(2,\ -1)$，$\vec{b}=(-1,\ 2)$．

解

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot(-3)+3\cdot1=0$, 故 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 互相垂直

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot(-1)+(-1)\cdot2\neq0$, 故 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 不互相垂直

18 內積的基本性質

設 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 為平面上任意向量, α 為任意實數, 則:

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.

(2) $(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\alpha\vec{b})=\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})$．

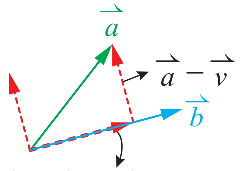
(3) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.

(4) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$.

19 向量的正射影

設 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 為平面上兩個向量, 且 $\vec{b}\neq0$, 則 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影為

$$\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right)\vec{b}.$$



$\vec{v}=\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影

例題

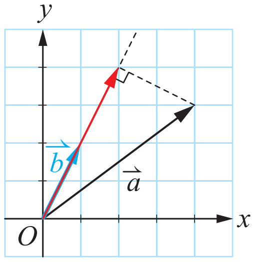
設 $\vec{a}=(4,\ 3)$，$\vec{b}=(1,\ 2)$，試求 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影.

解

如圖所示, $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影為

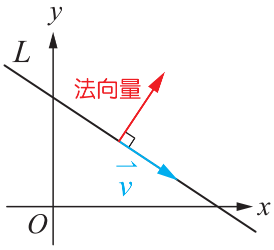
$$\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right)\vec{b}=\frac{4\times1+3\times2}{1^2+2^2}(1,\ 2)$$

$$=2(1,\ 2)=(2,\ 4)$$



20 直線的法向量

向量（a, b）為直線 L：$ax+by+c=0$ 的一個法向量.



例題

已知直線 L 的法向量為（2, −3），且通過點（−1, 4），試求此直線方程式.

解 因法向量為（2, −3），可設直線 L 方程式為 $2x-3y=k$.

又通過點（−1, 4），故

$2\times(-1)-3\times4=k$,

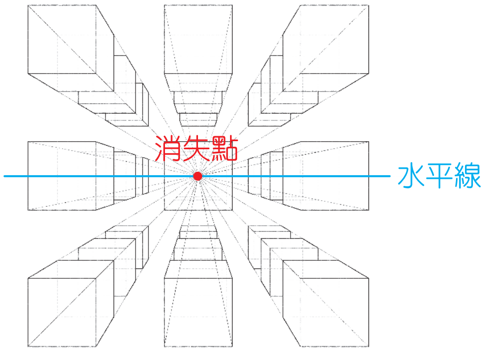
即 $k=-14$, 故直線 L 方程式為 $2x-3y+14=0$.

21 單點透視法

單點透視法就是在平面的透視圖中，讓空間中原本互相平行的直線都交會到同一個消失點，在這個透視圖中只有一個透視消失點，因而稱之為單點透視法.

如下圖左所示，平行的鐵軌交會於無窮遠，這個點在單點透視法中叫做消失點（VP）. 下圖右就是另一張單點透視圖，所有原本平行的直線都會交會於消失點.

圖左　鐵軌



圖右　單點透視圖

例題

畫家把空間景物用單點透視法畫在平面的畫紙上時，有以下原則要遵守：

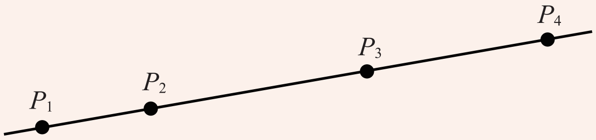
一、空間中的直線畫在畫紙上必須是一條直線.

二、空間直線上點的相關位置必須和畫紙所畫的點的相關位置一致.

三、空間直線上的任四個相異點的 K 值，和畫紙所畫的四個點之 K 值必須相同，其中 K 值的定義如下：直線上任給四個有順序的相異點 P_1, P_2, P_3, P_4, 如下圖.

其所對應的 K 值定義為

$$K=\frac{\overline{P_1P_4}\times\overline{P_2P_3}}{\overline{P_1P_3}\times\overline{P_2P_4}}.$$



今某畫家依照以上原則，將空間中一直線及該線上的四相異點 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 描繪在畫紙上，其中 $\overline{Q_1Q_2}=\overline{Q_2Q_3}=\overline{Q_3Q_4}$. 若將畫紙上所畫的直線視為一數線，並將線上的點用坐標來表示，則在下列選項的四個坐標中，試問哪一組最可能是該四點在畫紙上的坐標？

(A) 1, 2, 4, 8　(B) 3, 4, 6, 9　(C) 1, 5, 8, 9　(D) 1, 2, 4, 9　(E) 1, 7, 9, 10

〔111 學測數 B〕

解　計算 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 的 K 值可得

$$\frac{\overline{Q_1Q_4}\times\overline{Q_2Q_3}}{\overline{Q_1Q_3}\times\overline{Q_2Q_4}}=\frac{3\times1}{2\times2}=\frac{3}{4}$$

分別計算(A)～(E)中各組 K 值

$$K_1=\frac{(8-1)\times(4-2)}{(4-1)\times(8-2)}=\frac{14}{18}=\frac{7}{9}$$

$$K_2=\frac{(9-3)\times(6-4)}{(6-3)\times(9-4)}=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$$

$$K_3=\frac{(9-1)\times(5-5)}{(8-1)\times(9-5)}=\frac{24}{28}=\frac{6}{7}$$

$$K_4=\frac{(9-1)\times(4-2)}{(4-1)\times(9-2)}=\frac{16}{21}$$

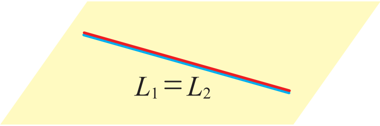
$$K_5=\frac{(10-1)\times(9-7)}{(9-1)\quad(10-7)}=\frac{18}{24}=\frac{3}{4}$$

故只有(E)的 K 值相同

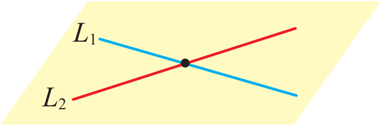
22 直線與直線的關係

空間中的兩直線 L_1 與 L_2 的位置關係有下列四種情形：

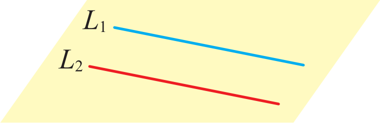
(1) 兩直線重合.



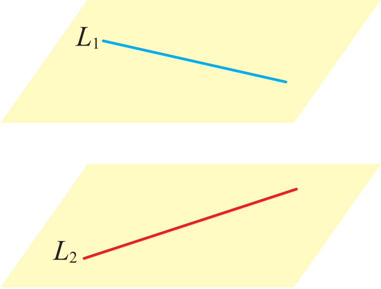
(2) 兩直線恰交於一點.



(3) 兩直線平行.

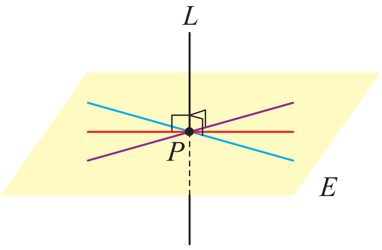


(4) 兩直線歪斜.



23 直線與平面垂直的定義

若直線 L 與平面 E 相交於一點 P，且平面 E 上通過 P 點的每一條直線都與直線 L 垂直，則稱直線 L 與平面 E 垂直，記為 $L\perp E$，此時直線 L 稱為平面 E 的一條法線.



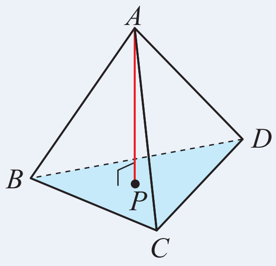
例題

右圖是一個正四面體，已知直線 AP 與平面 BCD 垂直於 P 點，試判斷下列哪些選項是正確的？

(A) 直線 AC 與平面 BCD 垂直

(B) 直線 AP 與直線 BP, CP, DP 皆垂直

(C) P 點為正三角形 BCD 的外心



解

(A) ×：若 $\overleftrightarrow{AC}\perp$平面 BCD，則 $\overline{AC}\perp\overline{CD}$ 且 $\overline{AC}\perp\overline{BC}$

此與 $\angle ACD=60^\circ=\angle ACB$ 相違背.

(B) ○：因 $\overline{AP}\perp$平面 BCD，故 $\overline{AP}\perp\overline{PB}$, $\overline{AP}\perp\overline{PC}$, $\overline{AP}\perp\overline{PD}$

(C) ○：由(B)知 $\angle APB=90^\circ=\angle APC=\angle APD$

又 $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}$，故 $\overline{PB}=\overline{PC}=\overline{PD}$

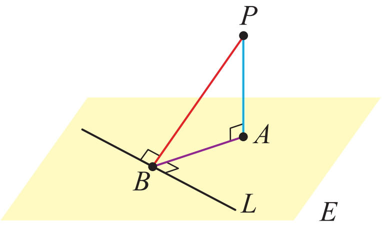
故 P 為 $\triangle BCD$ 外心.

24 三垂線定理

設直線 PA 與平面 E 垂直於 A 點，直線 L 為平面 E 上不通過 A 點的直線．

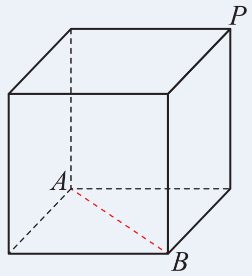
⑴ 若由 A 點向直線 L 作垂線，設其垂足為 B，則直線 PB 與直線 L 垂直於 B 點，如圖所示．

⑵ 反之，若直線 PB 與直線 L 垂直於 B 點，則直線 AB 與直線 L 亦垂直於 B 點．



例題

如右圖的單位正立方體，試求 P 點到 $\overline{AB}$ 的距離．



解

C 為 $\overline{AB}$ 中點，因底面 $ADBE$ 為正方形

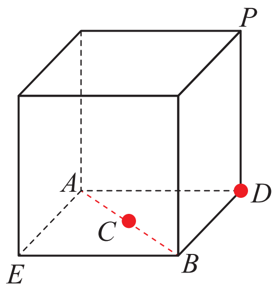
故 $\overline{AC}=\frac{1}{2}\sqrt{2}=\overline{CD}$

因 $\overline{PD}\perp$ 平面 $ADBE$，$\overline{DC}\perp\overline{AC}$

由三垂線定理知 $\overline{PC}\perp\overline{AC}$，且 $\angle \mathrm{PDC}=90^{\circ}$

由直角 $\triangle PDC$，$\overline{PD}=1$，$\overline{CD}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 可得

$$\overline{PC}=\sqrt{1+\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$



25 三視圖

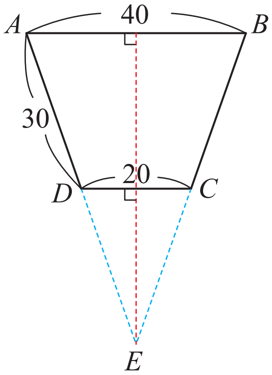
例題

直圓錐臺陶瓷花器．已知此花器的前視圖是等腰梯形，且其上底為 40 公分，下底為 20 公分，腰長 30 公分．試求：

⑴ 上、下底面的圓半徑各為多少公分？

⑵ 此直圓錐臺花器側面表面積為多少平方公分？

解



(1) 直圓錐臺的前視圖是等腰梯形 $ABCD$, 如右圖所示.

$\overline{AB}=40$（上底面圓的直徑），$\overline{CD}=20$（下底面圓的直徑），

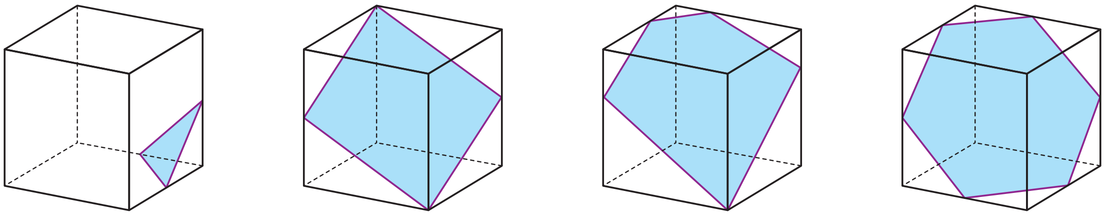
所以上、下底面的圓半徑各為 20 公分、10 公分.

(2) 將 $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ 延長交於 E 點, 由$\triangle EDC\sim\triangle EAB$ 可推得 $\overline{AE}=60$ 公分, $\overline{DE}=30$ 公分.

因此, 花器側面表面積為 $\pi\times60\times20-\pi\times30\times10=900\pi$ 平方公分.

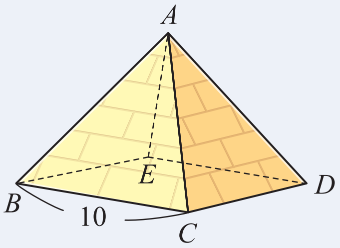
26 空間圖形的截痕

平面與立體圖形相交時, 其相交的部分稱為截痕, 而截痕所圍成的圖形稱為截面. 例如, 下列圖形是平面與正立方體的截痕及截面.

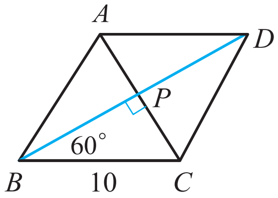


例題

右圖是一個金字塔的模型, 其底面為邊長 10 公分的正方形, 每一個側面都是正三角形, 若一隻螞蟻由 B 點沿著表面行走, 先經過 $\overline{AC}$ 再到達 D 點, 試求此螞蟻行走的最短距離.



解



將金字塔模型展開, 部分圖形如下:

由 30°－60°－90°三角形比例關係可知

$\triangle BCP$ 中, $\overline{BP}=10\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$

螞蟻沿 $\overline{BD}$ 行走距離為最短

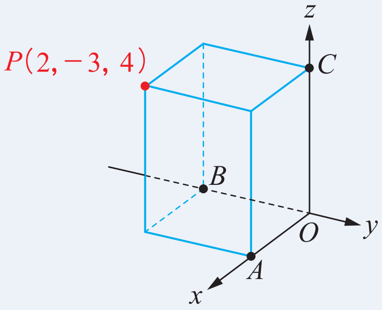
$\overline{BD}=2\times5\sqrt{3}=10\sqrt{3}$.

27 距離公式

坐標空間中，$P(x_1, y_1, z_1)$，$Q(x_2, y_2, z_2)$ 兩點的距離為
$\overline{PQ}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$.

例題

右圖是坐標空間中的一個長方體，P 點坐標為 $(2, -3, 4)$，試求 P 點分別到 x、y、z 軸的距離.



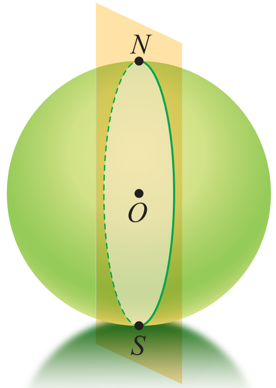
解

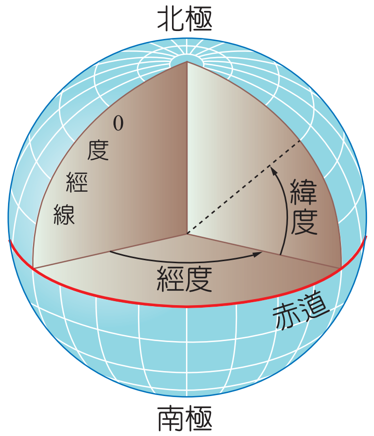
P 點到 x 軸的距離為
$\overline{PA}=\sqrt{(2-2)^2+(-3-0)^2+(4-0)^2}=5$.
P 點到 y 軸的距離為
$\overline{PB}=\sqrt{(2-0)^2+(-3+3)^2+(4-0)^2}=2\sqrt{5}\ (\approx 4.472)$.
P 點到 z 軸的距離為
$\overline{PC}=\sqrt{(2-0)^2+(-3-0)^2+(4-4)^2}=\sqrt{13}\ (\approx 3.606)$.

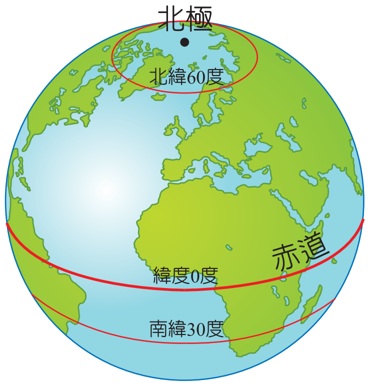
28 球面與平面的截痕及經緯線

(1) 設 O 為地球球心，S、N 為地球的南、北極，沿地表連接 N 與 S 的大圓弧（半個大圓），稱為經線. 經線的度數就是該經線所在的半平面與0度經線的半平面所夾的兩面角的度數，度數的取值為 0° 至 180°

(2) 緯線是由垂直 $\overline{NS}$ 的平面與球面所相交的圓，其中唯一的大圓稱為赤道，也稱為 0 度緯線，其餘的小圓區分為北緯線與南緯線，緯線的度數就是經過緯線上任一點的球半徑與赤道面所夾的度數.

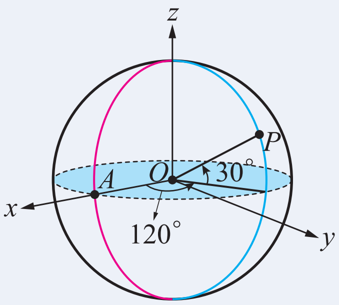




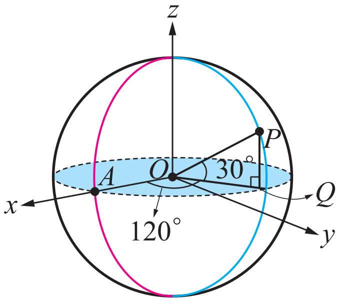


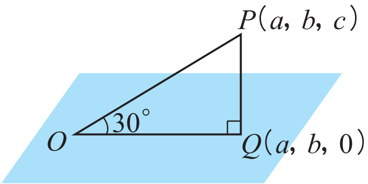
例題

如右圖，在空間坐標系中有一個半徑為 1 的球面，其球心為原點 O，赤道在 xy 平面上，x 軸正向與赤道交於 A 點，且 A 點在 0 度經線上，若 P 點位於北緯 30 度，東經 120 度的交點上，試求 P 點的空間坐標.



解 設 P 點坐標為（a, b, c），Q 點為 P 在 xy 平面的投影點，如下兩圖所示





則 Q 點坐標為（$a, b, 0$）且 $\angle POQ=30°$，$\angle AOQ=120°$，所以

$$c=\overline{PQ}=1\times\sin 30°=\frac{1}{2}，且\ \overline{OQ}=1\times\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

因此，在 xy 平面上由廣義角三角比定義得

$$a=\overline{OQ}\times\cos 120°=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

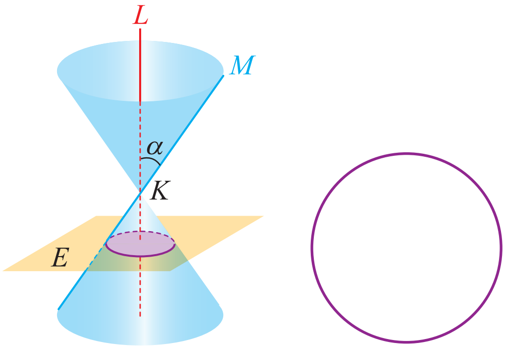
$$b=\overline{OQ}\times\sin 120°=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{4}$$

故 P 點坐標為 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$

29 圓錐曲線

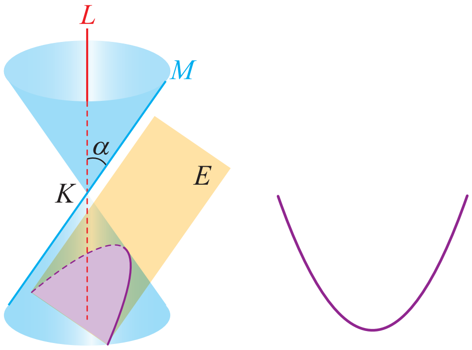
平面 E 與直圓錐面的截痕可以是圓、橢圓、拋物線或雙曲線，如下列各圖所示.

（1）圓：



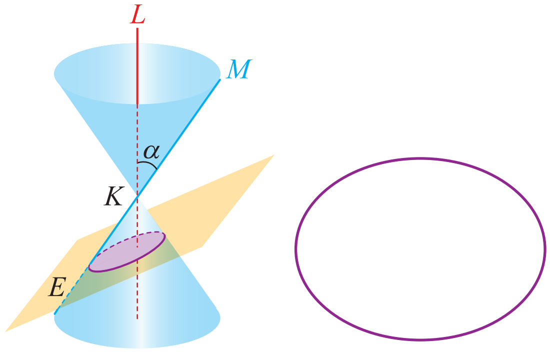
(a)　(b)

（2）拋物線：



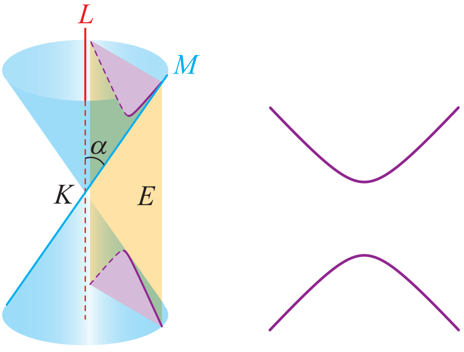
(a)　(b)

（3）橢圓：



(a)　(b)

（4）雙曲線：



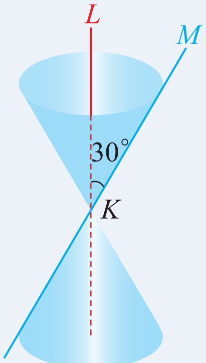
(a)　(b)

例題

如圖，已知直線 M 與直線 L 夾角 30 度，交於 K 點．將直線 M 繞直線 L，形成一個頂點在 K 的直圓錐面．

（1）若有一平面 E 不過 K 點，且其法向量與直線 L 的方向平行，試問此平面與直圓錐面的截痕是什麼形狀？

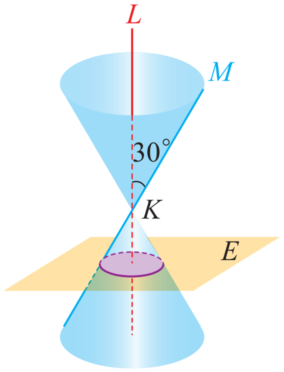
（2）若有一平面 E 不過 K 點，且其法向量與直線 L 的方向夾 60 度，試問此平面與直圓錐面的截痕是什麼形狀？

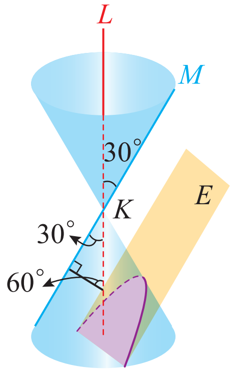


解

（1）平面 E 與直線 L 垂直，因此平面橫截此圓錐面，截痕是一個圓，如左圖．

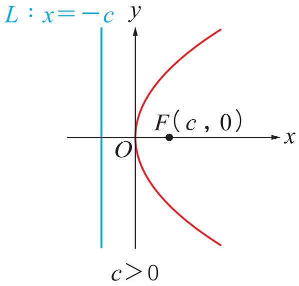
（2）當平面 E 的法向量與直線 L 的方向夾 60 度時，平面 E 與直線 M 平行，因此平面 E 與直圓錐面的截痕為拋物線，如右圖．



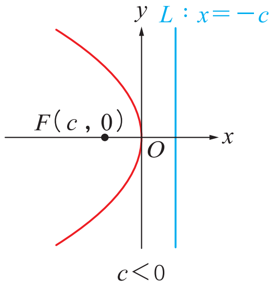


30 拋物線的標準式

1. $y^2=4cx$ 圖形有兩種可能:
   - (1) 當 $c>0$ 時, 其圖形開口向右, 圖(a).
   - (2) 當 $c<0$ 時, 其圖形開口向左, 圖(b).

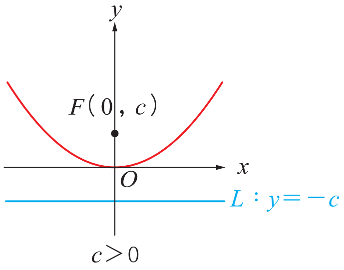


(a)

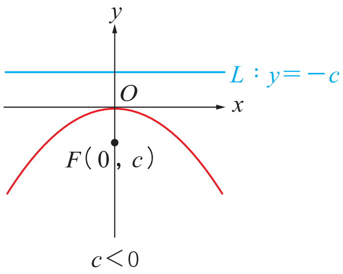


(b)

2. $x^2=4cy$ 圖形有兩種可能:
   - (1) 當 $c>0$ 時, 其圖形開口向上, 圖(c).
   - (2) 當 $c<0$ 時, 其圖形開口向下, 圖(d).



(c)

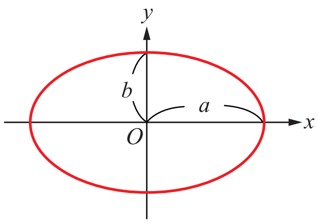


(d)

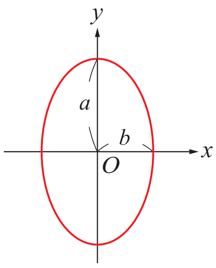
31 橢圓的標準式

(1) 設長軸在 x 軸上, 則橢圓的標準式為 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

(2) 設長軸在 y 軸上, 則橢圓的標準式為 $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$.



(c)

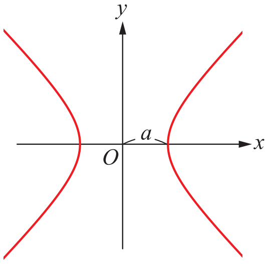


(d)

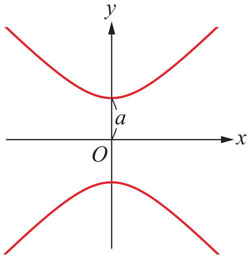
32 雙曲線的標準式

(1) 設貫軸在 x 軸上，則雙曲線的標準式為 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

(2) 設貫軸在 y 軸上，則雙曲線的標準式為 $-\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$.



(c)

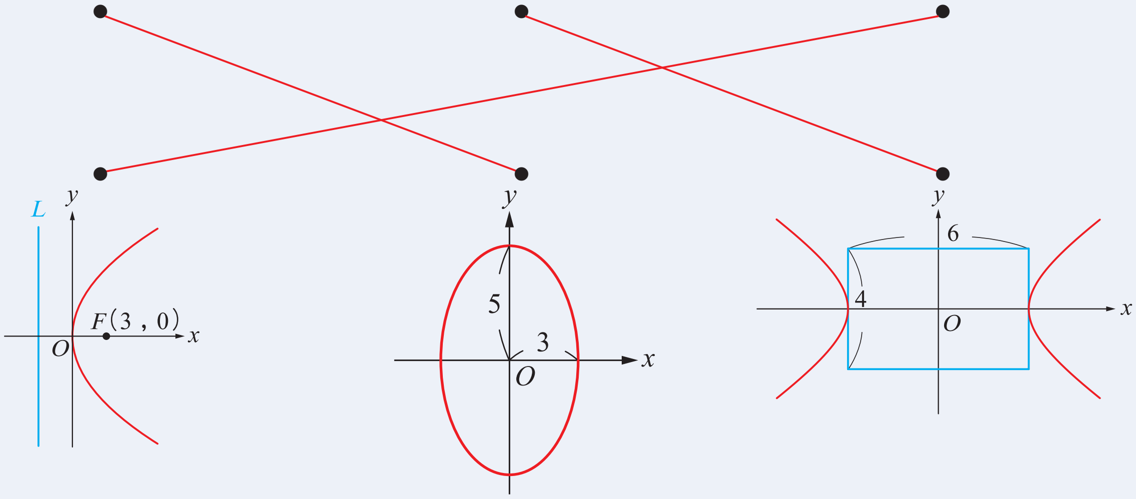


(d)

例題

試用直線將二次函數及其圖形連接起來.

$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$　　$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$　　$y^2=12x$



33 條件機率

設 A, B 為樣本空間 S 中的兩事件，且 $P(A)>0$．則在事件 A 發生的條件下，事件 B 發生的條件機率為 $P(B|A)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$.

例題

調查某校高一學生擁有手機以及平板電腦的情形，當中擁有手機又擁有平板電腦的比例占全部學生的 60％，沒有手機但擁有平板電腦的比例占 5%，沒有手機也沒有平板電腦的比例占 15％．若在擁有手機的學生中任意挑選一人，試問此人同時也擁有平板電腦的機率為何？

解 令 A 表示這些學生中擁有手機的事件

B 表示這些學生中擁有平板的事件

則所求機率為 $P(B|A)$

$P(A')=5\%+15\%$（沒有手機有平板＋沒有手機也沒有平板）

故 $P(A)=1-P(A')=0.8$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0.6}{0.8}=\frac{3}{4}.$$

34 獨立事件

設 A, B 為兩事件，若 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$，則稱 A, B 為獨立事件.

例題

若甲，乙兩種種子根據過去栽種經驗，知道其發芽率分別為 0.9 與 0.75．今從這兩種種子中各取一顆，假設各種子是否發芽相互獨立，試求：

⑴ 恰有一顆種子能發芽的機率為何？

⑵ 兩顆種子都沒有發芽的機率為何？

⑶ 至少有一顆種子發芽的機率為何？

解 令 A 表示甲種種子發芽的事件，B 表示乙種種子發芽的事件．依題意，

$P(A)=0.9,\ P(B)=0.75$.

又 A, B 為獨立事件，則：

⑴ $P(A\cap B')+P(A'\cap B)=P(A)P(B')+P(A')P(B)=0.9\times0.25+0.1\times0.75=0.3$.

⑵ $P(A'\cap B')=P(A')P(B')=0.1\times0.25=0.025$.

⑶ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.9+0.75-0.9\times0.75=0.975$.

或是 $1-P(A'\cap B')=1-0.025=0.975$.

35 三事件為獨立事件

設 A, B, C 為三事件，同時滿足下列條件時，稱 A, B, C 三事件為獨立事件.

⑴ $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

⑵ $P(B\cap C)=P(B)P(C)$.

⑶ $P(A\cap C)=P(A)P(C)$.

⑷ $P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$.

例題

溫布頓男子網球賽採五戰三勝制（即先勝三局者獲勝晉級），根據過去紀錄知甲選手與乙選手實力有段差距，甲選手與乙選手獲勝的機率比為 4：1，但比賽前兩局甲選手因失誤過多，導致兩局皆敗．假設經過短暫休息後，甲選手恢復原來水準，之後也沒有其他特殊狀況發生，請問比賽最後結果誰獲得晉級的可能性較大？

解

因甲選手與乙選手獲勝的機率比為 4：1，

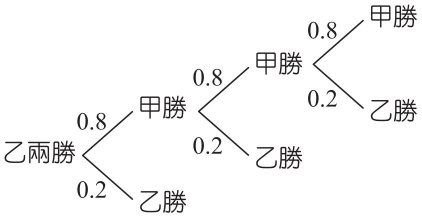
故任比一場甲選手獲勝的機率為 0.8.

由樹狀圖得知若甲選手晉級，僅有一種可能情形.

故甲選手獲勝的機率為

$$0.8\times0.8\times0.8=0.512,$$

甲選手的勝率超過五成，所以甲選手晉級的可能性較大.



36 矩陣的定義

設 m, n 為正整數，形如

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \phantom{a_{11}} & & \text{第 } j \text{ 行} & & \phantom{a_{1n}} \\ & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \text{第 } i \text{ 列} \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

的矩形陣列稱為 $m\times n$ 階矩陣，以 $[a_{ij}]_{m\times n}$ 表示．此矩陣有 m 列，n 行，其中 a_{ij} 為第 i 列與第 j 行交叉位置上的元，稱為矩陣的第（i, j）元.

37 矩陣加法、減法與係數積的定義

1. 設 A, B 都是 $m\times n$ 階的矩陣, 且

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix},\text{ 則}$$

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix},$$

即將相同位置的元相加. 也就是若 $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$, 則 $A+B=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]_{m\times n}$.

2. 矩陣減法的定義

設 A, B 都是 $m\times n$ 階的矩陣, 則定義 A 與 B 的差為 $A-B=A+(-B)$. 即 A 中的每一個元減去 B 中相同位置上的元.

也就是若 $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$, 則 $A-B=\left[a_{ij}-b_{ij}\right]_{m\times n}$.

3. 矩陣的係數積

即若 $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, 則 $rA=\left[ra_{ij}\right]_{m\times n}$.

38 矩陣的係數積具有以下的性質

(1) $r(A+B)=rA+rB$.

(2) $(r+s)A=rA+sA$.

(3) $(rs)A=r(sA)$.

(4) $0A=O$.　（等號左邊表示乘上 0, 等號右邊是零矩陣）

(5) $(-1)A=-A$.

例題

已知矩陣 $A=\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 10 & 20 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$, 且 $X+3B=2A$, 試求矩陣 X.

解 將等號兩邊同時減去 $3B$, 得 $X=2A-3B$, 故

$$X=2\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 10 & 20 \end{bmatrix}-3\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 16 & 4 \\ 20 & 40 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 18 & 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 & -8 \\ 2 & 34 \end{bmatrix}.$$

39 矩陣乘法的定義

設 A 是一個 $m\times n$ 階矩陣，$A=[a_{ij}]_{m\times n}$，B 是一個 $n\times p$ 階矩陣，$B=[b_{ij}]_{n\times p}$，則 $C=AB$ 是一個 $m\times p$ 階矩陣，$C=[C_{ij}]_{m\times p}$，其中 $C_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$，即

$$\begin{array}{c} \\ \\ \text{第 } i \text{ 列} \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \cdot \begin{array}{c} \text{第 } j \text{ 行} \\ \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}_{n\times p} \end{array} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{ip} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}_{m\times p}$$

$$A \qquad\qquad B \qquad = \qquad C$$

在前面的定義中，注意到 A，B 兩個矩陣相乘時，矩陣 A 的行數必須要等於矩陣 B 的列數，AB 才有意義，而且

$$A_{m\times \underset{\uparrow}{n}}B_{\underset{\uparrow}{n}\times p}=C_{m\times p}.$$

相等

例題

已知矩陣 $A=\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$，

(1) 試求 AB.　　　　(2) 判斷 BA 是否有意義.

解

(1) 因為矩陣 A 是 2×3 階矩陣，矩陣 B 是 3×4 階矩陣，所以乘積 AB 是 2×4 階矩陣，如下：

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5\times3+4\times1+2\times4 & 5\times(-1)+4\times0+2\times3 & 5\times0+4\times1+2\times2 & 5\times1+4\times3+2\times5 \\ 1\times3+3\times1+6\times4 & 1\times(-1)+3\times0+6\times3 & 1\times0+3\times1+6\times2 & 1\times1+3\times3+6\times5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 27 & 1 & 8 & 27 \\ 30 & 17 & 15 & 40 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(2) 因為矩陣 B 是 3×4 階矩陣，矩陣 A 是 2×3 階矩陣，B 的行數 4 不等於 A 的列數 2，所以 BA 沒有意義.