

## 一、單選題 (每題 5 分, 共 10 分)

1. 函數  $f(x) = (x-2)(x-3)(2x+1)$ , 則  $f'(2) = ?$ 

(A) -1

(B) -5

(C) 0

(D) 1

(E) 5

$$\begin{aligned} \text{解 } f'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)(2x+1) - 0}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-3)(2x+1) \\ &= (-1) \times 5 = -5 \end{aligned}$$

故選(B)

2. 已知函數  $f(x) = x^3 + 3x^2$ , 則其反曲點坐標為下列何者?

(A) (0, 3)

(B) (1, 3)

(C) (-1, 2)

(D) (2, -1)

(E) (2, -9)

解 由題意知,  $f'(x) = 3x^2 + 6x$ ,  $f''(x) = 6x + 6$ 令  $f''(x) = 0$ , 則  $x = -1$ ,代入函數  $f(x)$  得  $f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 = 2$ 得反曲點為  $(-1, 2)$ , 故選(C)

## 二、多選題 (每題 5 分, 所有選項均答對者得 5 分, 錯一個選項得 3 分, 錯兩個選項得 1 分, 其餘不給分, 共 10 分)

3. 函數  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$ , 下列哪些選項可以使函數  $f(x)$  的導數為 0?

(A) -1

(B) 0

(C) 1

(D) 3

(E) 5

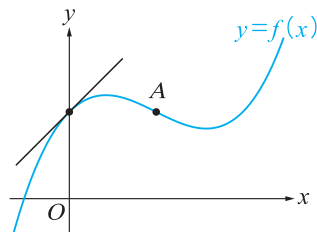
解  $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$ , 令  $f'(x) = 0$ 即  $3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x+1)(x-3) = 0 \Rightarrow x = -1$  或  $3$ 

故選(A)(D)



4. 三次多項式函數  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  的圖形如右，其中  $A$  是反曲點，請選出正確選項。

- (A)  $a > 0$   
 (B)  $c > 0$   
 (C)  $d > 0$   
 (D)  $f(x)$  是遞增函數  
 (E)  $f(x) = 0$  有 3 個實根



- 解** (A) ○：圖形右邊的  $x$  值愈大則函數值 ( $y$  坐標) 愈大，故知  $a > 0$   
 (B) ○： $f(x)$  圖形與  $y$  軸的交點坐標為  $(0, d)$ ，過此點的切線斜率為  $f'(0)$   
 觀察題圖可知此切線的斜率大於 0  
 另一方面， $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ ，我們有  $f'(0) = c \therefore c > 0$   
 (C) ○： $\because f(x)$  圖形與  $y$  軸正向有交點  $\therefore f(0) = d > 0$   
 (D) ×：由題圖可知， $f(x)$  先遞增再遞減，然後再遞增  
 (E) ×： $f(x)$  圖形與  $x$  軸只有一個交點，故  $f(x) = 0$  只有 1 個實根  
 故選(A)(B)(C)

### 三、填充題 (每格 5 分，共 60 分)

5. 定義函數  $f(x) = x^3 + x^2$ ，則此函數圖形上以  $A(-1, 0)$  為切點的切線方程式為\_\_\_\_\_，此切線與函數  $f(x)$  圖形的另一交點  $B$  坐標為\_\_\_\_\_。

- 解** 先求  $f(x)$  的一階導函數  $f'(x) = 3x^2 + 2x$ ，  
 以  $A(-1, 0)$  為切點的切線斜率為  $f'(-1) = 3 - 2 = 1$   
 故切線方程式為  $y - 0 = 1 \times (x + 1)$ ，整理得  $y = x + 1$ ，即  $x - y + 1 = 0$   
 令  $x^3 + x^2 = x + 1 \Rightarrow x^2(x + 1) - (x + 1) = 0$   
 $\Rightarrow (x^2 - 1)(x + 1) = 0 \Rightarrow (x - 1)(x + 1)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 1$  或  $-1$   
 $x = 1$  代入  $f(x)$  得  $f(1) = 1^3 + 1^2 = 2$   
 故另一交點  $B$  坐標為  $(1, 2)$

6. 函數  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$  的遞減區間為\_\_\_\_\_，圖形在區間\_\_\_\_\_凹口向上。

解  $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2) = 6(x + 2)(x - 1)$

令  $f'(x) = 0$ ，解得  $x = -2$  或  $1$

$f''(x) = 12x + 6$ ，令  $f''(x) = 0$ ，得  $x = -\frac{1}{2}$

列表如下：

| $x$      | $-2$                                                                              |   | $-\frac{1}{2}$                                                                    |   | $1$                                                                               |   |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------|---|-----------------------------------------------------------------------------------|---|-----------------------------------------------------------------------------------|---|
| $f'(x)$  | +                                                                                 | 0 | -                                                                                 | 0 | -                                                                                 | + |
| $f''(x)$ | -                                                                                 | - | 0                                                                                 | + | +                                                                                 | + |
| 增減       | ↗                                                                                 |   | ↘                                                                                 |   | ↘                                                                                 | ↗ |
| 略圖       |  |   |  |   |  |   |

故遞減區間為  $[-2, 1]$ ，圖形在區間  $(-\frac{1}{2}, \infty)$  凹口向上

7. 三次函數  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$  相對極大值為\_\_\_\_\_，相對極小值為\_\_\_\_\_。

解  $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x + 1)(x - 3)$

令  $f'(x) = 0$  得  $x = -1$  或  $3$

$f(-1) = -1 - 3 + 9 + 5 = 10$ ， $f(3) = 27 - 27 - 27 + 5 = -22$ ，列表如下：

| $x$     | $-1$       |     | $3$        |     |            |
|---------|------------|-----|------------|-----|------------|
| $f'(x)$ | $+$        | $0$ | $-$        | $0$ | $+$        |
| $f(x)$  | $10$       |     | $-22$      |     |            |
| 增減      | $\nearrow$ |     | $\searrow$ |     | $\nearrow$ |

故相對極大值為  $10$ ，相對極小值為  $-22$

8. 已知三次函數  $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ ，在  $x = 1$  時有極小值為  $-14$ ，且圖形的反曲點坐標為  $(-1, 2)$ ，則：

(1)  $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2)  $f(x)$  的極大值為  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

**解** (1) 由已知， $f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$ ， $f''(x) = 6x + 2b$

$\because$  點  $(-1, 2)$  為反曲點  $\therefore f''(-1) = -6 + 2b = 0$ ，解得  $b = 3$

$\because f(x)$  在  $x = 1$  時有極小值  $\therefore f'(1) = 3 + 2b + c = 0$ ，將  $b = 3$  代入，得  $c = -9$

又  $f(-1) = 2$ ，即  $-1 + b - c + d = 2$ ，將  $b = 3$ ， $c = -9$  代入，得  $d = -9$

故  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 9$

(2) 承(1)， $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x+3)(x-1)$

當  $f'(x) = 0$  時，得  $x = -3$  或  $x = 1$

$f(-3) = -27 + 27 + 27 - 9 = 18$ ， $f(1) = 1 + 3 - 9 - 9 = -14$

列表如下：

| $x$     | -3 | 1   |
|---------|----|-----|
| $f'(x)$ | +  | -   |
| $f(x)$  | 18 | -14 |
| 增減      | ↗  | ↘   |

因此  $f(x)$  在  $x = -3$  時有極大值 18

〈另解〉

三次函數圖形以反曲點為對稱中心

$\therefore f(x)$  圖形的反曲點坐標為  $(-1, 2)$

$\therefore (1, -14)$  的對稱點為  $(-3, 18)$

故知  $f(x)$  的極大值為 18

9. 已知三次函數  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 14$  在  $x = 2$  與  $x = 4$  時都有極值，試求：

(1) 數對  $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 此函數的極小值為  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

**解** (1) 取  $f(x)$  的一階導函數  $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$\because f(x)$  在  $x = 2$  與  $x = 4$  時都有極值

$\therefore 2$  與  $4$  都是  $f'(x) = 0$  的根

令  $(x-2)(x-4) = 0$ ，得  $x^2 - 6x + 8 = 0$ ，比較  $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b = 0$

得  $\frac{3}{1} = \frac{2a}{-6} = \frac{b}{8} \Rightarrow a = -9, b = 24$ ，故數對  $(a, b) = (-9, 24)$

(2) 由(1)可知  $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 14$

$f(2) = 8 - 36 + 48 - 14 = 6$ ， $f(4) = 64 - 144 + 96 - 14 = 2$ ，列表如下：

| $x$     | 2 | 4 |
|---------|---|---|
| $f'(x)$ | + | - |
| $f(x)$  | 6 | 2 |
| 增減      | ↗ | ↘ |

故  $f(x)$  在  $x = 4$  時有極小值 2



10. 取一張邊長 18 公分的正方形卡紙，將四個角落切去大小相同的小正方形，再將它摺為一個無蓋的小紙盒。則此小紙盒的最大容積為\_\_\_\_\_立方公分，此時切去的正方形邊長為\_\_\_\_\_公分。

**解** 設切去的正方形邊長為  $x$  公分，其中  $0 < 2x < 18$ ，故  $0 < x < 9$

$$\text{則小紙盒的容積 } V = f(x) = x(18 - 2x)^2 = 4x^3 - 72x^2 + 324x$$

$$f'(x) = 12x^2 - 144x + 324 = 12(x^2 - 12x + 27) = 12(x - 3)(x - 9)$$

令  $f'(x) = 0$  解得  $x = 3$  或  $9$ ， $f(3) = 3(18 - 6)^2 = 432$ ， $f(9) = 0$ ，列表如下：

| $x$     | 3   |   | 9 |   |
|---------|-----|---|---|---|
| $f'(x)$ | +   | 0 | - | 0 |
| $f(x)$  | 432 |   | 0 |   |
| 增減      | ↗   |   | ↘ | ↗ |

$\therefore f(x)$  在  $x = 3$  時有極大值 432

故此小紙盒的最大容積為 432 立方公分，此時切去的正方形邊長為 3 公分

#### 四、計算題（每題 10 分，共 20 分）

11. 試求三次函數  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 6$  的切線中，斜率為 3 的切線方程式。（有兩解）

**解**  $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$

$$\text{設 } x = a \text{ 時，} f'(a) = 3，\text{即 } 3a^2 - 12a + 12 = 3 \Rightarrow a^2 - 4a + 3 = 0$$

$$\Rightarrow (a - 1)(a - 3) = 0 \Rightarrow a = 1 \text{ 或 } 3$$

$$f(1) = 1 - 6 + 12 + 6 = 13，f(3) = 27 - 54 + 36 + 6 = 15$$

故知切點為  $(1, 13)$  與  $(3, 15)$

由直線點斜式可得切線方程式為  $y - 13 = 3(x - 1)$  與  $y - 15 = 3(x - 3)$

整理得  $3x - y + 10 = 0$ ， $3x - y + 6 = 0$

12. 已知三次函數  $f(x) = x^3 + 3x^2 + kx - 3$  沒有極值，試求  $k$  的範圍。

**解**  $\because f(x)$  沒有極值，且  $f(x)$  的三次項係數大於 0

$\therefore$  可知  $f(x)$  為遞增函數，故  $f'(x) > 0$  或  $f'(x) = 0$

由已知， $f'(x) = 3x^2 + 6x + k$ ，若  $f'(x) \geq 0$ ，則  $6^2 - 4 \times 3 \times k \leq 0$

即  $36 - 12k \leq 0$ ，得  $k \geq 3$