2-2 導函數與函數圖形

重點整理

一、二階導函數

二階導函數：$f'(x)$的導函數，記為$f''(x)$或$(f'(x))'$或$\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$。

例：$f(x)=x^4$，$f'(x)=4x^3$，則$f''(x)=12x^2\left(\text{也可以記為 } \dfrac{d^2}{dx^2}f(x)=12x^2\right)$。

二、函數的遞增與遞減

1. 遞增與遞減：

   已知函數$f(x)$定義在某一區間I上，則對任意x_1，$x_2\in I$，

   (1) 當$x_1<x_2$恆有$f(x_1)\leq f(x_2)$，稱$f(x)$在區間I為遞增函數。

   (2) 當$x_1<x_2$恆有$f(x_1)<f(x_2)$，稱$f(x)$在區間I為嚴格遞增函數。

   (3) 當$x_1<x_2$恆有$f(x_1)\geq f(x_2)$，稱$f(x)$在區間I為遞減函數。

   (4) 當$x_1<x_2$恆有$f(x_1)>f(x_2)$，稱$f(x)$在區間I為嚴格遞減函數。

2. 一階導函數與遞增遞減性：

   設$f(x)$為一次以上之多項式函數，

   (1) 若$f'(x)>0$在(a,b)都成立，則$f(x)$在$[a,b]$是(嚴格)遞增函數，即對任意x_1，$x_2\in[a,b]$，若$x_1<x_2$，則$f(x_1)<f(x_2)$。

   (2) 若$f'(x)<0$在(a,b)都成立，則$f(x)$在$[a,b]$是(嚴格)遞減函數，即對任意x_1，$x_2\in[a,b]$，若$x_1<x_2$，則$f(x_1)>f(x_2)$。

三、凹向性與二階導函數

1. 函數圖形凹向性的判別：

   設$f(x)$為二次以上多項式函數，

   (1) 若$f''(x)$在某區間中恆大於 0，則$f(x)$的圖形在該區間凹口向上。

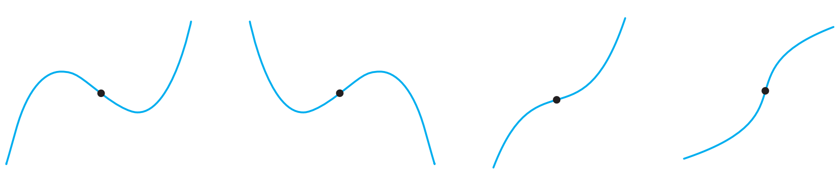
   (2) 若$f''(x)$在某區間中恆小於 0，則$f(x)$的圖形在該區間凹口向下。

凹口向上　　凹口向下

例：二次函數$f(x)=x^2$圖形為開口向上的拋物線，其二階導函數對所有實數x而言，恆有$f''(x)=2>0$，可以驗證此函數圖形凹口向上。

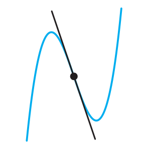
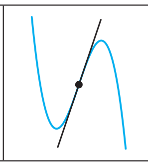
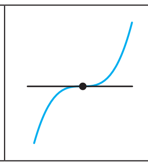
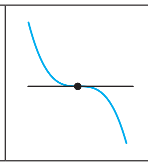
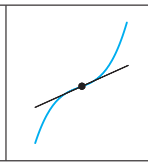
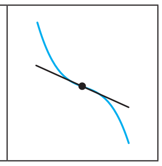
2. 反曲點(point of inflection)：

   若$f(x)$在$x=c$處連續，且$f(x)$的圖形在點$(c,f(c))$兩側的凹向相反，則稱點$(c,f(c))$為$f(x)$圖形的反曲點。



四、三次函數的繪圖

1. 三次函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 圖形的分類：【補充】

圖形						

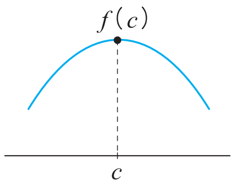
2. 函數的極值：

(1) 函數的相對極大值與相對極小值：

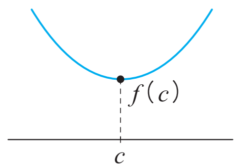
設函數 $f(x)$ 定義在開區間 I 上，且 c 為 I 中的一點。

① 若對於開區間 I 中的每一個點 x 都有 $f(c)\geq f(x)$，則稱 $f(c)$ 是 f 的一個相對極大值（簡稱極大值），如圖㈠。

② 若對於開區間 I 中的每一個點 x 都有 $f(c)\leq f(x)$，則稱 $f(c)$ 是 f 的一個相對極小值（簡稱極小值），如圖㈡。

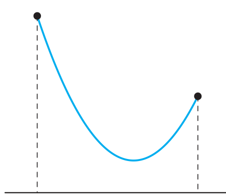


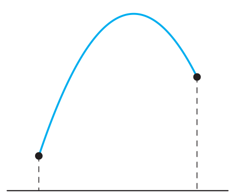
圖㈠



圖㈡

當 c 為函數 $f(x)$ 定義區間的端點時，若 $f(x)$ 在 c 的值比在附近的值大，則 $f(c)$ 也是 f 的一個相對極大值，如圖㈢；若 $f(x)$ 在 c 的值比在附近的值小，則 $f(c)$ 也是 f 的一個相對極小值，如圖㈣。


圖㈢


圖㈣

(2) 函數的最大值與最小值：

設 c 在函數 $f(x)$ 的定義域中，

① 若對定義域中的每一個 x，都有 $f(c)\geq f(x)$，則稱 $f(c)$ 為最大值。

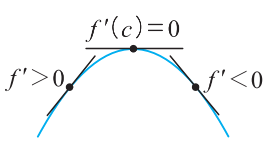
② 若對定義域中的每一個 x，都有 $f(c)\leq f(x)$，則稱 $f(c)$ 為最小值。

3. 函數極值的判定法：

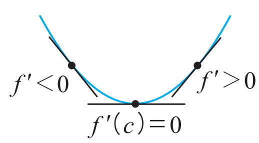
設 $f(x)$ 為多項式函數，且 $f'(c)=0$。

(1) 如果在某個包含 c 點的開區間中，在 c 左側有 $f'>0$，右側有 $f'<0$，則 $f(c)$ 是極大值，如圖㈤。

(2) 如果在某個包含 c 點的開區間中，在 c 左側有 $f'<0$，右側有 $f'>0$，則 $f(c)$ 是極小值，如圖㈥。

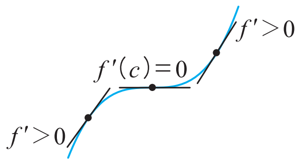


圖㈤

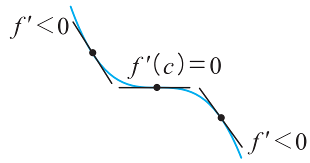


圖㈥

(3) 如果在某個包含 c 的開區間中，在 c 的左右兩側 f' 同號（同正或同負），則 $f(c)$ 不是極大值也不是極小值，如圖(七)、圖(八)。



圖(七)



圖(八)

例題 1　一階及二階導函數(一)

已知三次函數 $f(x)=4x^3+x^2-2x-3$，試求：

(1) $f(x)$ 的一階導函數 $f'(x)$。（5 分）

(2) $f(x)$ 的二階導函數 $f''(x)$。（5 分）

解 (1) $f'(x)=12x^2+2x-2$

(2) $f''(x)=24x+2$

例題 2　一階及二階導函數(二)

已知三次函數 $f(x)=x^3-3x^2+2x+7$，試求：

(1) $\dfrac{d}{dx}f(x)$。（5 分）

(2) $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$。（5 分）

解 (1) $\dfrac{d}{dx}f(x)=3x^2-6x+2$

(2) $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)=6x-6$

例題 3　一階及二階導函數(三)

已知三次函數 $f(x)=3(x-1)(x+1)(x+2)$，試求：

(1) $f(x)$ 的一階導函數。（5 分）

(2) $f(x)$ 的二階導函數。（5 分）

解 將 $f(x)$ 乘開整理

$f(x)=3(x^2-1)(x+2)=3(x^3+2x^2-x-2)$

$\quad=3x^3+6x^2-3x-6$

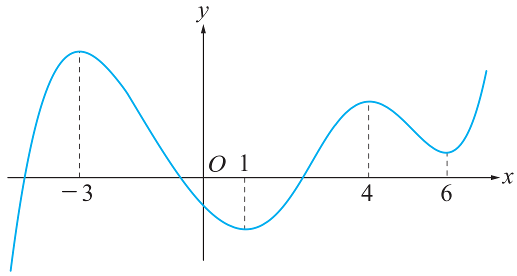
(1) $f'(x)=9x^2+12x-3$

(2) $f''(x)=18x+12$

例題 4　函數的遞增遞減區間(一)

⑴ 右圖是函數 $y=f(x)$ 的圖形，試問此函數在哪些區間遞減？（5 分）

⑵ 已知二次函數 $f(x)=x^2+2x+3$，試求 $f(x)$ 的遞增區間。（5 分）



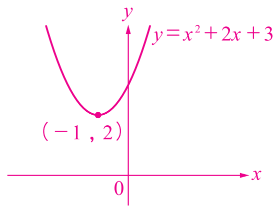
解 ⑴ 觀察圖形可知

函數 $f(x)$ 在 $[-3, 1]$ 與 $[4, 6]$ 遞減

⑵ $f(x)=x^2+2x+3=(x+1)^2+2$

作圖如右

故遞增區間為 $[-1, \infty)$



例題 5　函數的遞增遞減區間(二)

已知三次函數 $f(x)=x^3-3x^2-9x+7$，試求：

⑴ $f(x)$ 的遞增區間。（5 分）

⑵ $f(x)$ 的遞減區間。（5 分）

解 $f(x)$ 的導函數 $f'(x)=3x^2-6x-9=3(x^2-2x-3)=3(x+1)(x-3)$

解 $f'(x)>0$，得 $x<-1$ 或 $x>3$，列表如下：

x		-1		3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

由判定法可知

⑴ $f(x)$ 的遞增區間為 $(-\infty, -1]$ 與 $[3, \infty)$

⑵ $f(x)$ 的遞減區間為 $[-1, 3]$

例題 6　三次函數圖形的凹向性

已知三次函數 $f(x)=x^3-3x^2+2$，

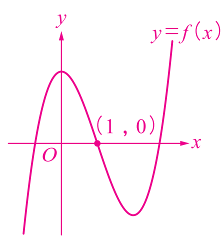
⑴ 試討論 $f(x)$ 圖形的凹向性。（5 分）

⑵ 試求 $f(x)$ 圖形的反曲點坐標。（5 分）

解 $f'(x)=3x^2-6x$，$f''(x)=6x-6$

解 $f''(x)=0$ 得 $x=1$，列表如下：

x		1	
$f''(x)$	$-$	0	$+$
凹向	$\frown$		$\smile$



⑴ $x<1$ 時，圖形凹口向下

$x>1$ 時，圖形凹口向上

⑵ $f(1)=1-3+2=0$

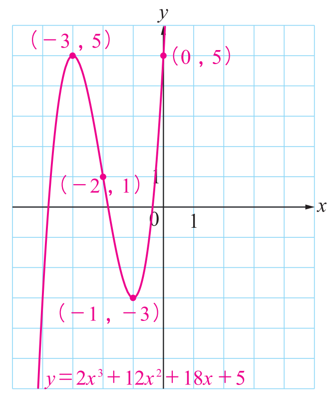
∴反曲點坐標為 $(1, 0)$

例題 7　三次函數的作圖(一)

已知三次函數 $f(x)=2x^3+12x^2+18x+5$，請完成下表（5 分），並描繪圖形（5 分）。

解

x		-3		-2		-1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
增減	↗		↘		↘		↗
凹向							
略圖							



(1) $f'(x)=6x^2+24x+18$，令 $f'(x)=0$

$\Rightarrow x^2+4x+3=0 \Rightarrow x=-1$ 或 -3

(2) $f''(x)=12x+24$，令 $f''(x)=0 \Rightarrow x=-2$

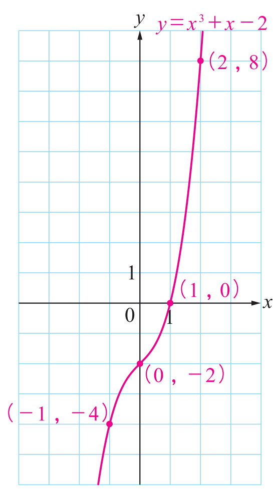
參考在 $x=-1$，-2，-3，附近的 $f'(x)$，$f''(x)$ 後列表，

又 $f(-3)=5$，$f(-2)=1$，$f(-1)=-3$，作圖如上

例題 8　三次函數的作圖(二)

試描繪三次函數 $f(x)=x^3+x-2$ 的圖形。（10 分）

解



(1) $f'(x)=3x^2+1$

解 $f'(x)=0$ 即 $3x^2+1=0$，沒有實根

且 $f'(x)$ 恆大於 0，故 $f(x)$ 在實數上都是遞增

(2) $f''(x)=6x$

解 $f''(x)=0$ 即 $6x=0$，得 $x=0$

x		0	
$f'(x)$	$+$		$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
略圖			

$f(0)=-2$，$f(1)=0$，$f(2)=8$，$f(-1)=-4$，$f(-2)=-12$

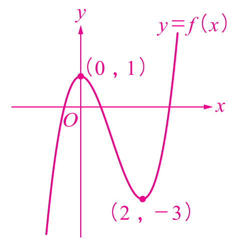
可得如左圖

2-2

翰林用心教師用精益求精

例題 9　三次函數的極值

試求三次函數 $f(x)=x^3-3x^2+1$ 的極值與產生極值的 x 值。（10 分）



解 $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

令 $f'(x)=0 \Rightarrow 3x(x-2)=0 \Rightarrow x=0$ 或 2

列表如下：

x		0		2	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$		1		−3	
增減	↗		↘		↗

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 時有極大值 1，在 $x=2$ 時有極小值 -3

例題 10　三次函數的最大值與最小值

函數 $f(x)=x^3+6x^2-13$ 在區間 $[-2，3]$ 的

(1) 最大值。（5 分）

(2) 最小值。（5 分）

解 $f'(x)=3x^2+12x$，

令 $f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2+12x=0$

$\Rightarrow x(x+4)=0 \Rightarrow x=-4$ 或 0

$f(-4)=-64+96-13=19$，$f(0)=-13$，列表如下：

x		−4		0	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$		19		−13	
增減	↗		↘		↗

$f(-2)=-8+24-13=3$，$f(3)=27+54-13=68$

故最大值為 68，最小值為 -13