



第2章

微分

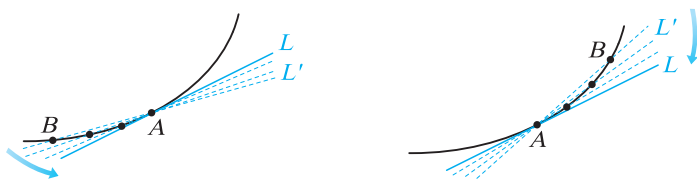
2-1 微分與切線

重點整理

一、切線斜率與導數

1. 切線斜率：

如下圖，在函數圖形上固定點 $A(a, f(a))$ ，讓點 $B(x, f(x))$ 沿著圖形趨近於 A 點，則割線 AB 的斜率會趨近於過 A 點的切線斜率，此斜率為 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ 。



例：函數 $y = x^2$ 圖形上，以點 $A(1, 1)$ 為切點的切線斜率為 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$ 。

2. 導數 (derivative)：

對於函數 $f(x)$ ，若極限 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ 存在，

則稱此極限為 $f(x)$ 在 $x = a$ 的導數，記為

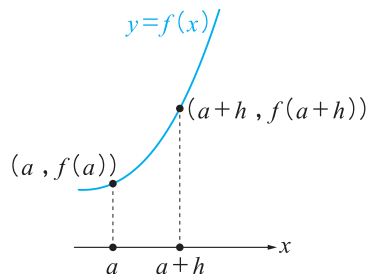
$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}。$$

若令 $x = a + h$ ，則 $h = x - a$ ，

當 $x \rightarrow a$ 時， $(x - a) \rightarrow 0$ ，我們有 $h \rightarrow 0$ 。

所以 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ 可以寫成 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$ 。

當此極限存在，我們稱 $f(x)$ 在 $x = a$ 有導數或可微分，反之，則稱不可微分。



3. 函數可微分與連續的關係：

函數 $f(x)$ 在 $x = a$ 可微分 (有導數)，則 $f(x)$ 在 $x = a$ 連續。即：

- (1) 可微分一定連續。
- (2) 連續不一定可微分。
- (3) 不連續就不可微分。

二、導函數

給定函數 $f(x)$ 在某範圍內可微分，若 a 在此範圍中，則「由 a 對應到 $f'(a)$ 」是一個函數關係，稱為 $f(x)$ 的導函數 (derivative of function)，記為 $f'(x)$ 或 $(f(x))'$ 或

$$\frac{d}{dx} f(x)。$$

例：函數 $f(x) = x^3$ ，導函數為 $f'(x) = 3x^2$ 。也可記為 $(x^3)' = 3x^2$ ，或 $\frac{d}{dx} x^3 = 3x^2$ 。



2-1



三、微分的運算

假設 $f(x)$ 、 $g(x)$ 皆為可微分函數， $f(x)$ 、 $g(x)$ 的微分分別為 $f'(x)$ 、 $g'(x)$ 。

1. 常數函數：

$f(x) = c$ ，則 $f'(x) = (c)' = 0$ 。

例： $f(x) = 3$ ，則 $f'(x) = (3)' = 0$ 。

2. 單項式函數：

設 n 為正整數，且 $f(x) = x^n$ ，則 $f'(x) = (x^n)' = nx^{n-1}$ 。

例： $f(x) = x^5$ ，則 $f'(x) = (x^5)' = 5x^4$ 。

3. 係數積：

設 c 為常數，則 $(cf(x))' = cf'(x)$ 。

例： $f(x) = x^5$ ， $c = 3$ ，則 $(cf(x))' = (3x^5)' = 3(x^5)' = 3(5x^4) = 15x^4$ 。

4. 函數的加減法：

$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$ 。

$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$ 。

例： $(2x^4 + 3x^2)' = 8x^3 + 6x$ ， $(3x^2 - 2x)' = 6x - 2$ 。

5. 多項式函數的微分：

設 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ ，

則 $f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1$ 。

例： $(3x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 6x - 2)' = 12x^3 + 15x^2 + 6x + 6$ 。

四、導數的應用

1. 切線方程式：

設函數 $f(x)$ 在 $x = a$ 可微分，則函數 $y = f(x)$ 圖形以點 $(a, f(a))$ 為切點的切線方程式為 $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ 。其中 $f'(a)$ 即為切線方程式的斜率。

例： $f(x) = x^2 + x + 2$ ，試求以 $y = f(x)$ 圖形上一點 $A(1, 4)$ 為切點的切線方程式。

$f'(x) = 2x + 1$ ， $f'(1) = 2 + 1 = 3$ ，故所求切線方程式為 $y - 4 = 3(x - 1)$ ，
整理得 $3x - y + 1 = 0$ 。

2. 變化率：

若函數 $f(x)$ 在 $x = a$ 處可微分，則導數 $f'(a)$ 即為 $f(x)$ 在 $x = a$ 的瞬間變化率。

將 $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ 的近似值看成 $f'(x)$ ，則 $f(x+h) - f(x) \approx f'(x)h$ 。

五、邊際成本

在到達某一產量以後，多生產一件產品的真正（實際）成本稱為邊際成本（marginal cost）。邊際成本函數定義為「總成本函數的導函數」，即產量為 x 時，
邊際成本 $= F(x+1) - F(x) \approx F'(x)$ = 邊際成本函數在 x 的值。

● 例題 1 函數圖形的割線斜率與切線斜率

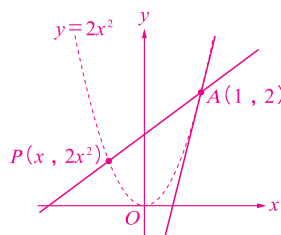
已知函數 $y = 2x^2$ 圖形上點 $A(1, 2)$ ， $P(x, 2x^2)$ 為圖形上的動點，試求：

- (1) 割線 AP 的斜率 (以 x 表示)。(5 分)
- (2) P 點趨近於 A 點時，割線斜率的極限 (就是過 A 點的切線斜率)。(5 分)

解 (1) 割線 AP 的斜率為 $\frac{2x^2 - 2}{x - 1} = \frac{2(x^2 - 1)}{x - 1} = \frac{2(x + 1)(x - 1)}{x - 1}$
 $= 2(x + 1)$

(2) 承(1)， P 點趨近於 A 點

故所求為 $\lim_{x \rightarrow 1} 2(x + 1) = 2(1 + 1) = 4$



● 例題 2 導數的定義與求值

函數 $f(x) = -x^2 + 5$ ，試將 $f(x)$ 在 $x = 3$ 的導數 $f'(3)$ 用定義式表示，並求此導數 (極限)。(定義式 5 分，導數 5 分)

解 $f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(-x^2 + 5) - (-3^2 + 5)}{x - 3}$
 $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x^2 - 9)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} -(x + 3) = -6$

● 例題 3 用定義求函數的導函數

函數 $f(x) = x^2$ ，試利用導函數的定義，求 $f(x)$ 的一階導函數 $f'(x)$ 。(10 分)

解 對任意實數 a

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x + a) = 2a$$

故知 $f'(a) = 2a$ 定義了 a 對應到 $2a$ 的關係，用 x 表示可得 $f'(x) = 2x$

● 例題 4 由公式求導函數

試求下列函數的一階導函數 $\frac{dy}{dx}$ ：

- (1) $y = 3x^2 - 2x + 1$ 。(5 分)
- (2) $y = 4x^3 + 2x^2 - 3x - 6$ 。(5 分)

解 (1) $\frac{dy}{dx} = 6x - 2$

(2) $\frac{dy}{dx} = 3 \times 4x^2 + 2 \times 2x - 3 = 12x^2 + 4x - 3$

● 例題 5 由公式求導函數並計算導數

試利用微分公式計算：

- (1) 函數 $f(x) = 2x^3 + x^2 - 1$ ，求 $f'(x)$ 。(5 分)
- (2) 函數 $g(x) = x^4 - 2x^3 + 5x - 1$ ，在 $x = 1$ 的導數。(5 分)

解 (1) $f'(x) = 6x^2 + 2x$
(2) $g'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 5$
 $\therefore g'(1) = 4 - 6 + 5 = 3$

● 例題 6 以三次函數圖形上一點為切點的切線方程式

已知三次函數 $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2$ ，試求：

- (1) $y = f(x)$ 圖形上以 $A(-3, 2)$ 為切點的切線斜率。(5 分)
- (2) 承(1)，試求此切線方程式。(5 分)

解 $f'(x) = 3x^2 + 6x$
(1) 以 $(-3, 2)$ 為切點的切線斜率為 $f'(-3) = 27 - 18 = 9$
(2) 所求切線為 $y - 2 = 9(x + 3)$
整理得 $9x - y + 29 = 0$

● 例題 7 已知切線斜率求切點坐標及切線方程式

已知直線 L 與函數 $y = f(x) = x^2 - x + 1$ 的圖形相切且斜率為 3，試求：

- (1) 切點坐標。(5 分)
- (2) 直線 L 的方程式。(5 分)

解 (1) $f'(x) = 2x - 1$
設切點的 x 坐標為 a ，由題意 $f'(a) = 3$ ，即 $2a - 1 = 3$
移項得 $a = 2$ ，代入 $f(x)$ 得 $f(2) = 2^2 - 2 + 1 = 3$
故切點坐標為 $(2, 3)$
(2) 承(1)，直線 L 的方程式為 $y - 3 = 3(x - 2)$
整理得 $3x - y - 3 = 0$



2-1

● 例題 8 平均變化率與瞬間變化率

定義函數 $f(x) = x^2 + 3x - 5$ ，試求：

(1) $x = 1$ 到 $x = 3$ 的平均變化率。(5 分)

(2) $x = 1$ 的瞬間變化率。(5 分)

解 (1) $x = 1$ 到 $x = 3$ 的平均變化率為

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{(3^2 - 1^2) + 3(3 - 1) + 0}{3 - 1} = (3 + 1) + 3 = 7$$

(2) $f'(x) = 2x + 3$ ，故 $x = 1$ 的瞬間變化率為 $f'(1) = 2 + 3 = 5$

● 例題 9 自變數微小差距利用 $f(x+h) - f(x) \approx f'(x)h$ 估算函數值的差異

小彥到銀行將活期存款 20 萬元改為定期存款，年利率 1.38%，為期 5 年。行員告訴他，如果從其他銀行匯入這家銀行辦理定期存款，就可以用年利率 1.58% 計算。因為另外匯款比較麻煩，小彥想估算這兩種方案的本利和在 5 年後的差異再做決定。已知年利率 r 的複利計息，5 年後的本利和為本金的 $(1+r)^5$ 倍。如果令 $x = 1 + r$ ，則 5 年後的本利和為本金的 x^5 倍。要估算這兩種方案在 5 年後的差異，可以令 $f(x) = x^5$ ，再利用 $f(x+h) - f(x) \approx f'(x)h$ 估算，請幫小彥完成這項估算。(已知 $1.0138^4 \approx 1.0564$)(四捨五入至整數位)(10 分)

解 由 $f(x) = x^5$ ，可得 $f'(x) = 5x^4$

由題意， $x = 1 + 1.38\% = 1.0138$ ， $h = (1 + 1.58\%) - (1 + 1.38\%) = 0.002$

因此，兩種方案的利息差異約為本金的

$$f'(1.0138) \times 0.002 = 5 \times (1.0138)^4 \times 0.002 \approx 0.01 \times 1.0564 \text{ (倍)}$$

故 5 年後這兩種方案的差異約為 $200000 \times 0.01 \times 1.0564 = 2112.8 \approx 2113$ (元)

● 例題 10 邊際成本

大大公司資料顯示，產量為 x ($0 \leq x \leq 300$) 時，總成本函數為 $F(x) = -0.3x^2 + 300x + 2250$ (元)，試求：

(1) 生產第 101 個產品的成本。(5 分)

(2) $F'(100)$ 之值，並與第 101 個產品成本的差值進行比較。(5 分)

解 (1) $F(101) - F(100)$

$$\begin{aligned} &= (-0.3 \times 101^2 + 300 \times 101 + 2250) - (-0.3 \times 100^2 + 300 \times 100 + 2250) \\ &= 29489.7 - 29250 \\ &= 239.7 \text{ (元)} \end{aligned}$$

(2) $F'(x) = -0.6x + 300$

$$F'(100) = -0.6 \times 100 + 300 = 240 \text{ (元)}$$

$$240 - 239.7 = 0.3$$

兩者相差 0.3 元