

## 1-3 函數的極限

### 重點整理

#### 一、函數的極限

##### 1. 函數的極限：

設函數  $f(x)$  在一個包含  $a$  的開區間中的任意實數  $x (x \neq a)$  有定義，若能找到一個實數  $L$  使得：只要  $x$  足夠靠近  $a$ ，函數  $f(x)$  的值要多麼靠近  $L$  都可以。則我們稱函數  $f(x)$  在  $x=a$  時有極限  $L$ ，記為  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ 。

(1) 左極限： $x$  軸上， $x$  從  $a$  的左邊趨近於  $a$  時， $f(x)$  趨近的值，記為  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ 。

(2) 右極限： $x$  軸上， $x$  從  $a$  的右邊趨近於  $a$  時， $f(x)$  趨近的值，記為  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 。

所謂趨近於  $a$ ，是指  $x$  愈來愈接近  $a$ ，而不是  $x=a$ 。

##### 2. 極限存在的條件：

$f(x)$  在  $x=a$  有極限  $L \Leftrightarrow f(x)$  在  $x=a$  的左極限等於右極限，且都等於  $L$ 。

即  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  等價於  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$  且  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ 。

##### 3. 函數極限的運算性質：

若函數  $f(x)$  與  $g(x)$  在  $x=a$  時極限存在，且  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ， $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ ，則：

(1)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = L \pm M$ 。

(2) 若  $c$  為常數，則  $\lim_{x \rightarrow a} (cf(x)) = cL$ 。

(3)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = LM$ 。

(4) 若  $M \neq 0$ ，且對某個包含  $a$  的開區間內，所有不等於  $a$  的  $x$  都有  $g(x) \neq 0$ ，

$$\text{則 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}。$$

##### 4. 多項式函數與相關函數的極限：

若  $f(x)$  與  $g(x)$  為多項式函數，則：

(1)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ 。

(2) 當  $g(a) \neq 0$  時， $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}$ 。

#### 二、連續函數

直觀而言，連續函數就是「圖形沒有斷掉」。

##### 1. 函數在某一點連續：

函數  $f(x)$  在一區間上有定義， $a$  為該區間中的一點。

(1) 若  $a$  為該區間的內點（非端點），且  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ，則稱  $f(x)$  在  $x=a$  連續。

(2) 若  $a$  為該區間的左端點，且  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ ，則稱  $f(x)$  在  $x=a$  連續。

(3) 若  $a$  為該區間的右端點，且  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ ，則稱  $f(x)$  在  $x=a$  連續。

如果函數  $f(x)$  在某個範圍中的每個點都連續，就稱  $f(x)$  在這個範圍是連續的。

當函數在定義區間的每一點都連續，我們稱此函數為連續函數。反之，只要

$f(x)$  在某一點不連續，就稱  $f(x)$  不連續。

**例：** $f(x) = 3x + 2$ ， $g(x) = x^2 - 3x + 1$ ， $h(x) = \sin x + 3$  都是連續函數。





## 2. 連續函數的四則運算：

若函數  $f(x)$ ， $g(x)$  在  $x=a$  連續，則下列性質成立：

- (1)  $f(x)+g(x)$  在  $x=a$  連續。
- (2)  $f(x)-g(x)$  在  $x=a$  連續。
- (3)  $f(x)g(x)$  在  $x=a$  連續。

(4) 對某個包含  $a$  的開區間內的所有  $x$  都有  $g(x) \neq 0$ ，有  $\frac{f(x)}{g(x)}$  在  $x=a$  連續。

## 3. 多項式函數是連續函數：

多項式函數  $f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$  是連續函數。

**例：** $f(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 1$ ， $g(x) = 3x^2 + x - 2$ ， $h(x) = -5x + 3$  都是連續函數。

## 4. 連續函數的合成：

若  $f(x)$  在  $x=a$  連續， $g(x)$  在  $x=f(a)$  連續，則  $(g \circ f)(x)$  在  $x=a$  連續。

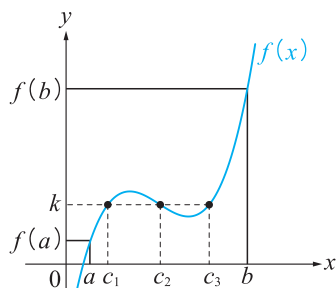
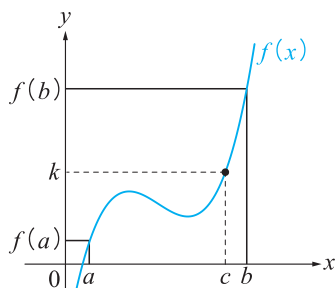
**例：**令  $f(x) = x^2$ ， $g(x) = \cos x$ ，若  $x=2$ ，則  $f(x)$  在  $x=2$  連續；

$f(2) = 4$ ， $g(4) = \cos 4$ ， $g(x)$  在  $x=f(2)$  連續，故  $(g \circ f)(x)$  在  $x=2$  連續。

## 三、介值定理與勘根定理

### 1. 介值定理 (intermediate value theorem)：

設  $a, b$  為兩實數， $a < b$ ，且  $f(x)$  是在  $[a, b]$  上的連續函數，若  $k$  是介於  $f(a)$  與  $f(b)$  之間的實數，但不等於  $f(a)$  及  $f(b)$ ，則至少有一個實數  $c$  滿足  $a < c < b$ ，且  $f(c) = k$ 。



**例：** $f(x) = x^2$  是連續函數， $f(1) = 1$ ， $f(2) = 4$ ，而 3 介於 1 與 4 之間，且  $3 \neq f(1)$ ， $3 \neq f(2)$ ，所以 1, 2 之間至少有一個實數  $c$  滿足  $c^2 = 3$ ，也就是  $1 < c < 2$  使得  $c^2 = 3$ 。事實上，這個  $c$  就是  $\sqrt{3}$ ，說明  $\sqrt{3}$  確實存在。

### 2. 勘根定理 (location of roots theorem)：

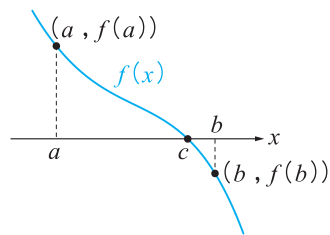
設  $a, b$  為兩實數，連續函數  $f(x)$  滿足  $f(a)f(b) < 0$ ，則  $f(x) = 0$  在  $a, b$  之間至少有一實根  $c$ 。

**例：**說明方程式  $x^2 - 3x + 1 = 0$  在 2, 3 之間有實根。

令  $f(x) = x^2 - 3x + 1$

$\therefore f(2) = -1$ ， $f(3) = 1$ ， $f(2)f(3) < 0$

$\therefore$  由勘根定理知， $x^2 - 3x + 1 = 0$  在 2, 3 之間有實根。



## 四、夾擠定理 (squeeze theorem)

設  $f(x)$ ， $g(x)$ ， $h(x)$  均為函數，且在包含  $a$  的開區間中，任意實數  $x (x \neq a)$  都滿足  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ 。若  $g(x)$  與  $h(x)$  在  $x=a$  時的極限都存在，且

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ ，則  $f(x)$  在  $x=a$  時極限存在，且  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ 。

**例：**已知對任意實數  $x$ ，函數  $f(x)$  滿足  $3x + 1 \leq f(x) \leq x^2 + 5x + 2$ ，試求  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ 。  
 $\therefore \lim_{x \rightarrow -1} (3x + 1) = -2$ ， $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 5x + 2) = -2$   $\therefore$  由夾擠定理可知  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -2$ 。

**例題 1 函數的極限(一)**

試計算下列各極限：

(1)  $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 1)$ 。(5 分)

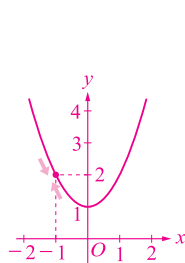
(2)  $\lim_{x \rightarrow 4} (x + 2)$ 。(5 分)

**解** (1) 如圖(一)，當  $x$  趨近於  $-1$  時， $x^2 + 1$  的函數值會趨近於 2

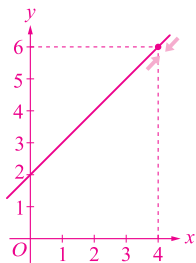
故  $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 1) = 2$

(2) 如圖(二)，當  $x$  趨近於 4 時， $x + 2$  的函數值會趨近於 6

故  $\lim_{x \rightarrow 4} (x + 2) = 6$



圖(一)



圖(二)

**例題 2 函數的極限(二)**函數  $f(x)$  圖形如右圖，試求：

(1)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ 。(4 分)

(2)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 。(3 分)

(3)  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ 。(3 分)

**解** (1)  $\because x$  由左側趨近於  $-1$  時， $f(x)$  趨近於 2 $x$  由右側趨近於  $-1$  時， $f(x)$  趨近於  $-2$ 

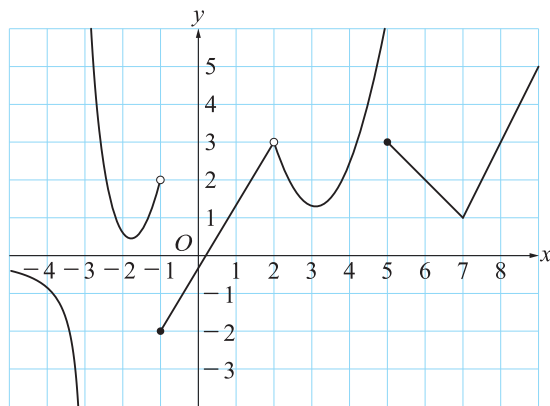
$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  不存在

(2)  $\because x$  由左側或右側趨近於 2 時， $f(x)$  趨近於 3

$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$

(3)  $\because x$  由左側趨近於 5 時， $f(x)$  趨近於無限大 $x$  由右側趨近於 5 時， $f(x)$  趨近於 3

$\therefore \lim_{x \rightarrow 5} f(x)$  不存在



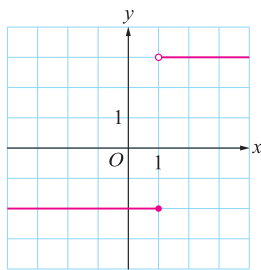
### 例題 3 函數極限不存在

設函數  $f(x) = \begin{cases} 3, & x > 1 \\ -2, & x \leq 1 \end{cases}$ ,

(1) 試作  $f(x)$  圖形。(5 分)

(2) 利用左極限與右極限說明  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  不存在。(5 分)

解 (1)



(2) 左極限為  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-2) = -2$

右極限為  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 3 = 3$

$\therefore$  左極限  $\neq$  右極限

$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  不存在

### 例題 4 多項式函數與有理函數的極限

試計算下列各極限：

(1)  $\lim_{x \rightarrow 2} ((2x+1)(x^2-x-1))$ 。(5 分)

(2)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x^2-2x+3}$ 。(5 分)

解 (1)  $\lim_{x \rightarrow 2} ((2x+1)(x^2-x-1)) = (4+1)(4-2-1) = 5$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x^2-2x+3} = \frac{3+3}{9-6+3} = \frac{6}{6} = 1$

### 例題 5 有理函數的極限一分母為 0 但可以消去因式

試計算下列各極限：

(1)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-16}{x-4}$ 。(5 分)

(2)  $\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{3}{x-3} - \frac{x+9}{(x-3)(x+1)} \right)$ 。(5 分)

解

(1)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-16}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+4)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x+4) = 4+4 = 8$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{3}{x-3} - \frac{x+9}{(x-3)(x+1)} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3(x+1) - (x+9)}{(x-3)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-6}{(x-3)(x+1)}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{x+1} = \frac{2}{3+1} = \frac{1}{2}$

**例題 6** 由分式函數極限存在計算未知係數

已知  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + ax - 2}{x + 2}$  存在，試求：

- (1) 實數  $a$ 。(5 分)
- (2) 此極限的值。(5 分)

**解** (1)  $\because \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + ax - 2}{x + 2}$  存在且  $x = -2$  使分母為 0

$\therefore x + 2$  必整除  $x^2 + ax - 2$

由因式定理，令  $x = -2$  代入分子得  $(-2)^2 + (-2)a - 2 = 0 \Rightarrow a = 1$

(2) 承(1)，得  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)(x - 1)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x - 1) = -2 - 1 = -3$

**例題 7** 求定義的  $a$  值使函數在某一點連續

若  $a$  為實數，且  $f(x) = \begin{cases} -x + 6 & , x \geq 1 \\ x^2 + 2x + a & , x < 1 \end{cases}$  是連續函數，試求：

- (1)  $f(1)$ 。(5 分)
- (2)  $a$  值。(5 分)

**解** (1)  $f(1) = -1 + 6 = 5$

(2) 由  $f(x)$  的定義可知， $f(x)$  在  $x > 1$  及  $x < 1$  都是連續函數

$\therefore x = 1$  也要連續  $\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

左極限  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 + 2 + a = a + 3$

右極限  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1 + 6 = 5$

由(1)知  $f(1) = 5 \therefore a + 3 = 5$ ，故  $a = 2$

**例題 8** 勘根定理的應用

假設  $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 5$ ，已知  $f(x) = 0$  有 3 個根，試判斷  $f(x) = 0$  在哪些連續整數之間有實根？(4 分、3 分、3 分)

**解** 考慮下列  $f(x)$  的變化

|        |    |   |   |    |    |   |
|--------|----|---|---|----|----|---|
| $x$    | -1 | 0 | 1 | 2  | 3  | 4 |
| $f(x)$ | -1 | 5 | 3 | -1 | -1 | 9 |

得  $f(x) = 0$  在  $-1, 0$  之間至少有一實根

$f(x) = 0$  在  $1, 2$  之間至少有一實根

$f(x) = 0$  在  $3, 4$  之間至少有一實根

已知  $f(x) = 0$  有 3 個根，

故  $f(x) = 0$  分別在  $x = -1$  與  $0$  之間， $x = 1$  與  $2$  之間， $x = 3$  與  $4$  之間各有一實根

### 例題 9 夾擠定理

已知對任意實數  $x$ ，函數  $f(x)$  滿足  $2x - 3 \leq f(x) \leq x^2 + 4x - 2$ ，試求  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ 。(10 分)

解  $\lim_{x \rightarrow -1} (2x - 3) = -2 - 3 = -5$

$\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 4x - 2) = 1 - 4 - 2 = -5$

由夾擠定理知  $f(x)$  在  $x = -1$  的極限存在

且  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -5$

### 例題 10 分段定義函數的極限與連續

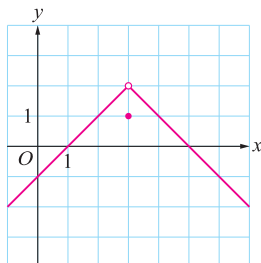
$$\text{函數 } f(x) = \begin{cases} -x + 5, & x > 3 \\ 1, & x = 3 \\ x - 1, & x < 3 \end{cases}$$

(1) 作  $y = f(x)$  圖形。(4 分)

(2)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  是否存在？(3 分)

(3)  $f(x)$  在  $x = 3$  是否連續？(3 分)

解 (1)



(2)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x - 1) = 3 - 1 = 2$

$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (-x + 5) = -3 + 5 = 2$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$ ，此極限存在

(3) 由(2)知  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$

但  $f(3) = 1$

故  $f(x)$  在  $x = 3$  不連續