



1-2 函數的概念

重點整理

一、函數的定義

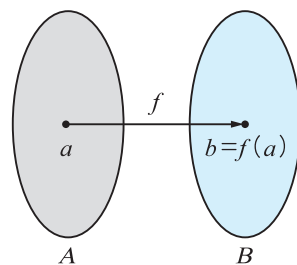
1. 當變數 y 隨著變數 x 而變化，我們稱 y 是 x 的函數，記為 $y=f(x)$ ，並稱 x 為自變數， y 為應變數。

例：水費(y)隨著用水量(x)不同而有不同的金額。

商店營業額(y)隨著銷售量(x)而有所不同。

2. 函數的定義域、對應域與值域：

f 是集合 A 、 B 中元素之間的一個對應關係。若對於集合 A 中的每個元素 a ，都可以找到集合 B 中的唯一元素 b ，使得 a 對應到 b ，則稱 f 是 A 到 B 的一個函數，用 $f: A \rightarrow B$ 表示。 b 稱為 f 在 a 的函數值，記為 $f(a)=b$ 。其中集合 A 稱為 f 的定義域，集合 B 稱為 f 的對應域。能夠被集合 A 中的元素對應到的集合 B 的元素所成的子集合，稱為 f 的值域。



例：定義函數 $y=f(x)=\sqrt{x}$ ，則此函數之

定義域： $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$ 。

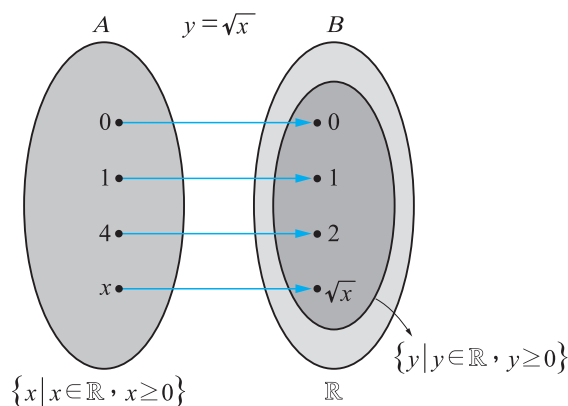
(非負實數所成的集合)

對應域： $\mathbb{R}$ 。

(所有實數所成的集合)

值域： $\{y \mid y \in \mathbb{R}, y \geq 0\}$ 。

(非負實數所成的集合)



二、函數的四則運算

1. 實函數 $f(x)$ ， $g(x)$ 透過四則運算可以形成新的函數，定義域是 $f(x)$ ， $g(x)$ 的共同範圍。

2. 函數的四則運算：

$$(1) (f+g)(x)=f(x)+g(x)。$$

$$(2) (f-g)(x)=f(x)-g(x)。$$

$$(3) (fg)(x)=f(x)g(x)。$$

$$(4) \left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0。$$

例： $f(x)=x^2+1$ ， $g(x)=2x$ ，則：

$$(f+g)(x)=x^2+1+2x=x^2+2x+1。$$

$$(f-g)(x)=x^2+1-2x=x^2-2x+1。$$

$$(fg)(x)=(x^2+1)(2x)=2x^3+2x。$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x^2+1}{2x}, x \neq 0。$$



三、合成函數 (composite function)

設 f, g 為函數，則 g 與 f 的合成函數 $g \circ f$ 的定義為 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ 。合成函數 $g \circ f$ 的定義域是使 $f(x)$ 落在 g 的定義域的所有 x 所成的集合。

例： $f(x) = x^2, g(x) = 2x + 1$ ，則：

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x + 1) = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1。$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 2x^2 + 1。$$

四、函數的圖形

1. 對於函數 $y = f(x)$ ，令 x 為橫坐標， $f(x)$ 為縱坐標，則在坐標平面上所有可能的點 $(x, f(x))$ 所成的集合稱為此函數的圖形。

因為每個 x 只有一個 y 值，所以每條鉛垂線至多與函數圖形有一個交點。

2. 常見的基本函數：

- (1) 多項式函數： $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0。$

例： $f(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 1, x \in \mathbb{R}。$

- (2) 絕對值函數： $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ ，

上列函數可以分段表示，又稱為分段函數。

- (3) 倒數函數： $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0。$

- (4) 高斯函數： $f(x) = [x]$ ， $[x]$ 是小於或等於 x 的最大整數。

例： $f(3.5) = [3.5] = 3,$

$$f(2) = [2] = 2,$$

$$f(-4.7) = [-4.7] = -5。$$

五、函數的奇偶性

1. 偶函數：

若 $f(-x) = f(x)$ ，則稱 f 為偶函數，圖形對稱於 y 軸。

例： $f(x) = x^2$ ，我們有 $f(-2) = f(2), f(-3) = f(3), \cdots$ 等。

$$g(x) = \cos x, \text{ 我們有 } g\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = g\left(\frac{2\pi}{3}\right), g(-\pi) = g(\pi), \cdots \text{ 等。}$$

2. 奇函數：

若 $f(-x) = -f(x)$ ，則稱 f 為奇函數，圖形對稱於原點。

例： $f(x) = x^3 + x$ ，我們有 $f(-1) = -f(1), f(-2) = -f(2), \cdots$ 等。

$$g(x) = \sin x, \text{ 我們有 } g\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -g\left(\frac{\pi}{3}\right), g(-\pi) = -g(\pi), \cdots \text{ 等。}$$

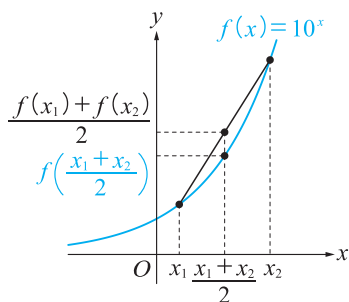
六、函數圖形的凹向性

1. 凹口向上：

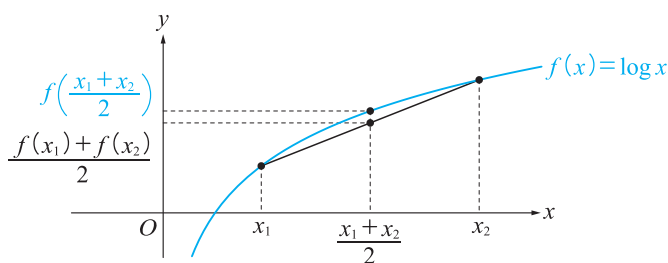
如圖(一)，若 $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ ，則稱 $f(x)$ 圖形凹口向上。

2. 凹口向下：

如圖(二)，若 $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ ，則稱 $f(x)$ 圖形凹口向下。



圖(一)



圖(二)

例題 1 函數的定義域

試求下列函數的定義域：

(1) $f(x) = \frac{1}{x+2}$ 。(5分)

(2) $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ 。(5分)

解 (1) 只要分母 $x+2 \neq 0$ ，即 $x \neq -2$ ， $f(x)$ 都有意義

故定義域為 $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq -2\}$

(2) 根號內的數不能小於 0，故令 $x^2 - 4 \geq 0$ ，則 $(x+2)(x-2) \geq 0$ ，解得 $x \leq -2$ 或 $x \geq 2$

故定義域為 $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 2\}$

例題 2 函數的值域

試求下列函數的值域：

(1) $y = f(x) = -x^2 + 4x - 2$ 。(5分)

(2) $y = g(x) = x^2 + 2x + 3, 0 \leq x \leq 2$ 。(5分)

解 (1) $y = f(x) = -(x^2 - 4x) - 2 = -(x-2)^2 + 2$

故 $f(x)$ 的值域為 $\{y \mid y \in \mathbb{R}, y \leq 2\}$

(2) $y = g(x) = (x^2 + 2x) + 3 = (x+1)^2 + 2, 0 \leq x \leq 2$

$x = -1$ 時， $g(x)$ 有最小值 2，但 $0 \leq x \leq 2$

得 $g(x)$ 的範圍為 $g(0) \leq g(x) \leq g(2)$ ，即 $3 \leq g(x) \leq 11$

故 $g(x)$ 的值域為 $\{y \mid y \in \mathbb{R}, 3 \leq y \leq 11\}$

● 例題 3 函數的四則運算(一)

已知函數 $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = \frac{1}{x+1}$, 試求:

(1) $(f+g)(x)$ 。(5 分)

(2) $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$ 。(5 分)

解 $f(x)$ 的定義域為 $\mathbb{R}$ (所有實數所成的集合), $g(x)$ 的定義域為 $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq -1\}$
這兩個定義域的交集為 $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq -1\}$

$$(1) (f+g)(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x+1} = \frac{2x^2 + x - 1 + 1}{x+1} = \frac{2x^2 + x}{x+1}$$

其定義域為 $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq -1\}$

$$(2) \left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{\frac{1}{x+1}}{2x-1} = \frac{1}{(x+1)(2x-1)} = \frac{1}{2x^2 + x - 1}$$

其定義域為 $\left\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq -1 \text{ 且 } x \neq \frac{1}{2}\right\}$

● 例題 4 函數的四則運算(二)

已知函數 $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = 3x - 4$, 試求:

(1) $(f-g)(x)$ 。(5 分)

(2) $(fg)(x)$ 。(5 分)

解 $f(x)$, $g(x)$ 的定義域為 $\mathbb{R}$

$$(1) (f-g)(x) = f(x) - g(x) = (2x+3) - (3x-4) = -x+7$$

其定義域為 $\mathbb{R}$

$$(2) (fg)(x) = f(x)g(x) = (2x+3)(3x-4) = 6x^2 + x - 12$$

其定義域為 $\mathbb{R}$

● 例題 5 合成函數(一)

設函數 $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 10x$, 試求:

(1) $(g \circ f)(x)$ 。(5 分)

(2) $(f \circ g)(x)$ 。(5 分)

解 (1) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = 10\sqrt{x}$

$$(2) (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(10x) = \sqrt{10x}$$

**例題 6 合成函數(一)**

已知函數 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, 其中 $f(x) = 3x - 1$, $g(x) = x^2 + 5$, 且 $f(h(2)) = g(3)$, 試求 $h(2)$ 之值。(10 分)

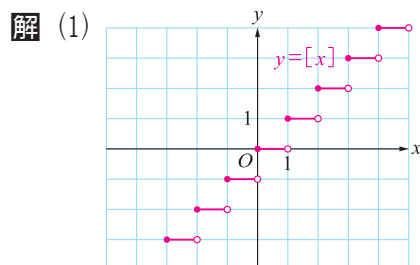
解 已知 $f(h(2)) = g(3)$, 則 $3h(2) - 1 = 3^2 + 5 = 14$

移項得 $3h(2) = 15$, 故得 $h(2) = 5$

例題 7 利用基本函數圖形作函數圖形(一)

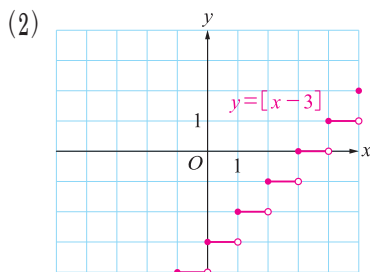
(1) 試描繪高斯函數 $y = [x]$ 的圖形。(5 分)

(2) 試利用函數 $y = [x]$ 的圖形描繪函數 $y = [x - 3]$ 的圖形。(5 分)



高斯函數的定義： $f(x) = [x]$ 為小於或等於 x 的最大整數

$$f(x) = [x] = \begin{cases} \vdots & \\ 2 & , 2 \leq x < 3 \\ 1 & , 1 \leq x < 2 \\ 0 & , 0 \leq x < 1 \\ -1 & , -1 \leq x < 0 \\ -2 & , -2 \leq x < -1 \\ \vdots & \end{cases} \quad , \text{作圖如左}$$

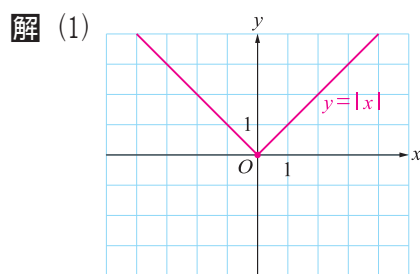


$y = [x - 3]$ 圖形為 $y = [x]$ 圖形向右平移 3 單位
作圖如左

例題 8 利用基本函數圖形作函數圖形(二)

(1) 試描繪絕對值函數 $y = |x|$ 的圖形。(5 分)

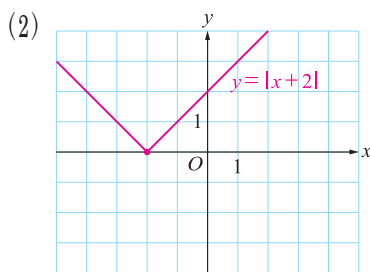
(2) 試利用函數 $y = |x|$ 的圖形描繪函數 $y = |x + 2|$ 的圖形。(5 分)



絕對值函數的定義：

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

作圖如左



$y = |x + 2|$ 圖形為 $y = |x|$ 圖形向左平移 2 單位
作圖如左

● 例題 9 函數的奇偶性

- (1) 試說明 $f(x) = \frac{3}{x}$ 是奇函數。(5 分)
- (2) 試說明 $g(x) = \cos x$ 是偶函數。(5 分)

解

(1) $\because f(-x) = \frac{3}{-x} = -\frac{3}{x} = -f(x)$
 $\therefore f(x)$ 是奇函數

(2) $\because g(-x) = \cos(-x) = \cos x = g(x)$
 $\therefore g(x)$ 是偶函數

● 例題 10 分段定義函數

某市自來水費每 2 個月收費一次，應繳總金額 = 用水費 + 基本費，其中用水費的單價依用水量多寡而不同，如下表(1 度 = 1 立方公尺，其中用水量(度)皆為整數)：

用水量級別	一	二	三	四	五
用水量(度)	0 ~ 20	21 ~ 60	61 ~ 200	201 ~ 1000	1001 以上
每度單價	5.0	6.7	8.5	14.0	20.0
累進差額(元)	-	34.0	142.0	1242.0	7242.0

舉例說明：裝設 25mm 口徑水表的用戶，前兩個月用水 30 度，則應繳費用為

- ① 用水費：每度單價(依用水量級別而異) × 用水量 - 累進差額，
 用水 30 度屬於第二級用水量，用水費為 $6.7 \times 30 - 34 = 167$ (元)。
- ② 基本費：依水表口徑收費，
 裝設 25mm 口徑水表的用戶每 2 個月基本費是 252 元。
- 故應繳總金額 = $167 + 252 = 419$ (元)。

假設小倫家裡裝設的水表口徑應付基本費為 136 元，請根據上述資料，回答以下問題：

- (1) 將小倫每兩個月應繳水費 y 元表示成用水量 x 度的函數 $f(x)$ 。(5 分)
- (2) 假設小倫家裡前兩個月用水量 50 度，則他應繳總金額為多少元？(5 分)

解

(1) 依已知條件得 $y = f(x) = \begin{cases} 5x + 136 & , 0 \leq x \leq 20 \\ 6.7x + 136 - 34 & , 21 \leq x \leq 60 \\ 8.5x + 136 - 142 & , 61 \leq x \leq 200 \\ 14x + 136 - 1242 & , 201 \leq x \leq 1000 \\ 20x + 136 - 7242 & , x \geq 1001 \end{cases}$

整理得 $y = f(x) = \begin{cases} 5x + 136 & , 0 \leq x \leq 20 \\ 6.7x + 102 & , 21 \leq x \leq 60 \\ 8.5x - 6 & , 61 \leq x \leq 200 \\ 14x - 1106 & , 201 \leq x \leq 1000 \\ 20x - 7106 & , x \geq 1001 \end{cases}$

(2) 承(1)， $f(50) = 6.7 \times 50 + 102 = 437$ (元)