



## 1-1 無窮等比級數

## 重點整理

## 一、數列

將一些數值依序排成一列，稱為數列。

例如  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ ，其中  $a_1$  稱為首項， $a_n$  是第  $n$  項（一般項）。

我們常用  $\langle a_n \rangle$  表示數列，例如  $\langle n^2 + 3 \rangle$ 。

**例：** $\langle 2n + 5 \rangle : 7, 9, 11, 13, 15, \dots$ 。

$\langle 2n - 1 \rangle, n$  為正整數且  $1 \leq n \leq 3 : 1, 3, 5$ 。

## 二、數列的極限及極限的性質

## 1. 無窮數列：

一個數列有無窮多項時，稱為無窮數列。

**例：** $\langle \frac{1}{n} \rangle : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ 。

$\langle n^2 - 1 \rangle : 0, 3, 8, 15, 24, \dots$ 。

## 2. 數列的收斂與發散：

(1) 若無窮數列  $\langle a_n \rangle$  滿足：存在一個定值  $L$ ，當  $n$  愈來愈大時， $a_n$  會趨近於  $L$ 。

則稱此數列收斂到  $L$ ，記為  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ ，我們稱  $L$  為此數列的極限。

(2) 數列不收斂到一個定值，則稱此數列發散。

**例：**數列  $\langle \frac{1}{n} \rangle$  收斂到 0，也就是極限為 0，記為  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ 。

數列  $\langle n^2 - 1 \rangle$  無法收斂到定值，我們稱它為發散。

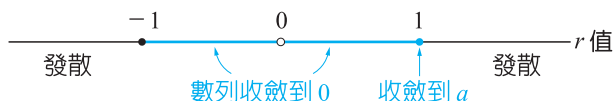
## 3. 無窮等比數列的收斂與發散：

無窮等比數列  $\langle ar^{n-1} \rangle : a, ar, ar^2, ar^3, \dots, ar^{n-1}, \dots$ ，其中實數  $a \neq 0$ ， $r \neq 0$ 。

(1) 若  $-1 < r < 1$ ，此數列收斂到 0。

(2) 若  $r = 1$ ，此數列收斂到  $a$ 。

(3) 若  $r = -1$  或  $|r| > 1$ ，此數列發散。



**例：** $\langle (0.99)^n \rangle$  是無窮等比數列

$\because$  公比  $r = 0.99$  滿足  $-1 < r < 1$ ，此數列收斂。

$\langle (-3)^n \rangle$  是無窮等比數列

$\because$  公比  $r = -3$  即  $|r| > 1$ ，此數列發散。



## 4. 極限的四則運算：

設  $\langle a_n \rangle$  與  $\langle b_n \rangle$  均為收斂數列且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = M$ , 則：

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = L + M. \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = L - M.$$

$$(3) \text{若 } c \text{ 為常數, 則 } \lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = cL. \quad (4) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_nb_n) = LM.$$

$$(5) \text{若 } M \neq 0, \text{ 且每一項 } b_n \text{ 均不為 } 0, \text{ 則 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L}{M}.$$

三、 $\Sigma$  的意義與性質1.  $\Sigma$  的意義：

級數可以用  $\Sigma$  表示 ( $\Sigma$  是希臘字母, 讀作 sigma, 是相加的意思)。

$\sum_{k=m}^n a_k$  即為將  $k$  從  $m$  變動到  $n$ , 依序代入  $a_k$  後, 全部加起來。其中  $k$  稱為指標,  $m$ 、 $n$  是正整數且  $m \leq n$ 。

**例：**  $\sum_{k=1}^4 k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$ 。令  $k=1, 2, 3, 4$ , 分別代入  $k^3$ , 得  $1^3, 2^3, 3^3, 4^3$ , 再相加即可。

**例：**  $\sum_{k=1}^5 (2k+3) = 5 + 7 + 9 + 11 + 13$ 。令  $k=1, 2, 3, 4, 5$ , 分別代入  $2k+3$ , 得  $5, 7, 9, 11, 13$ , 再相加即可。

2.  $\Sigma$  的運算性質：

(1) 若  $c$  為常數, 則  $\sum_{k=1}^n c = nc$ 。**例：**  $\sum_{k=1}^{10} 5 = 10 \times 5 = 50$ 。

(2)  $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$ ,  $\sum_{k=1}^n (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^n b_k$ 。

**例：**  $\sum_{k=1}^{10} a_k = 30$ ,  $\sum_{k=1}^{10} b_k = -20$ ,

則  $\sum_{k=1}^{10} (a_k + b_k) = 30 - 20 = 10$ ,  $\sum_{k=1}^{10} (a_k - b_k) = 30 - (-20) = 50$ 。

(3) 若  $c$  為常數, 則  $\sum_{k=1}^n ca_k = c \sum_{k=1}^n a_k$ 。**例：**  $\sum_{k=1}^n (3k) = 3 \sum_{k=1}^n k$ 。

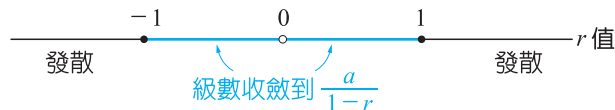
## 四、無窮等比級數與循環小數

## 1. 無窮等比級數：

無窮等比級數  $a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + \dots$ , 其中首項  $a \neq 0$ , 公比  $r \neq 0$ , 則：

(1) 當  $-1 < r < 1$  時, 此級數收斂, 其和  $S = \frac{a}{1-r}$ 。

(2) 當  $|r| \geq 1$  時, 此級數發散。



**例：**  $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$ ,

(公比  $r = \frac{1}{3}$ , 滿足  $-1 < r < 1$ )。

**例：** 無窮等比級數  $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n + \dots$

$\because$  公比  $r = 2 > 1 \quad \therefore$  此級數發散。



2. 有理數的小數表示：

(1) 有理數可化為有限小數或循環小數。

$$\text{例：} \frac{3}{4} = 0.75, \frac{2}{3} = 0.\overline{6}, \frac{5}{18} = 0.2\overline{7}。$$

(2) 有限小數可化為有理數。

$$\text{例：} 0.437 = \frac{437}{1000}, 0.29 = \frac{29}{100}。$$

(3) 循環小數可表為無窮等比級數的形式，並可化為有理數。

$$\text{例：} 0.\overline{28} = 0.28 + 0.0028 + 0.000028 + \dots$$

$$= \frac{28}{100} + \frac{28}{10000} + \frac{28}{1000000} + \dots = \frac{\frac{28}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{28}{99}。$$

### 例題 1 寫出數列的前六項

(1) 試寫出數列  $\langle 2n + 3 \rangle$  的前 6 項。(5 分)

(2) 已知數列  $\langle a_n \rangle$  的一般項為  $a_n = 2n^2 - 3n$ ，試寫出此數列的前 6 項。(5 分)

**解** 依序令  $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  分別代入

(1)  $\langle 2n + 3 \rangle$  的前 6 項：5, 7, 9, 11, 13, 15

(2)  $\langle 2n^2 - 3n \rangle$  的前 6 項：-1, 2, 9, 20, 35, 54

### 例題 2 寫出數列的一般項

試寫出下列數列的一般項  $a_n$ ：

(1) 正偶數所成的數列：2, 4, 6, 8, ……。(5 分)

(2) 正整數的倒數所成的數列。(5 分)

**解** (1) 將 2, 4, 6, 8, ……與 1, 2, 3, 4, ……比較

$$\text{得 } a_n = 2n$$

(2) 將  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ 與 1, 2, 3, 4, ……比較

$$\text{得 } a_n = \frac{1}{n}$$

**例題 3 等比數列第幾項開始小於定值**

已知等比數列  $\left\langle \frac{1}{3^n} \right\rangle$ ，試求：

- (1) 此數列從第幾項開始，其值會小於  $\frac{1}{1000}$ 。(5分)  
 (2) 此數列從第幾項開始，其值會小於  $10^{-10}$ 。(已知  $\log 3 \approx 0.4771$ )(5分)

**解** (1) 解  $\frac{1}{3^n} < \frac{1}{1000}$ ，即  $3^n > 1000$   
 $\because 3^6 = 729 < 1000, 3^7 = 2187 > 1000$   
 故此數列從第 7 項開始小於  $\frac{1}{1000}$

(2) 解  $\frac{1}{3^n} < 10^{-10}$ ，取常用對數得  $-n \log 3 < -10$   
 $\Rightarrow n > \frac{10}{\log 3} \approx \frac{10}{0.4771} = 20.95\cdots$   
 故此數列從第 21 項開始小於  $10^{-10}$

**例題 4 收斂數列的極限**

判斷下列各數列是否收斂，若為收斂數列，試求其極限。

(1)  $\left\langle \frac{2n^2 - 1}{n^2} \right\rangle$ 。(5分)

(2)  $\left\langle \frac{n^2}{10} \right\rangle$ 。(5分)

**解** (1)  $\left\langle \frac{2n^2 - 1}{n^2} \right\rangle = \left\langle 2 - \frac{1}{n^2} \right\rangle : 2 - \frac{1}{1}, 2 - \frac{1}{4}, 2 - \frac{1}{9}, \dots$  趨近於 2

即  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 1}{n^2} = 2$

故數列  $\left\langle \frac{2n^2 - 1}{n^2} \right\rangle$  收斂，且收斂到 2

(2)  $\left\langle \frac{n^2}{10} \right\rangle : \frac{1}{10}, \frac{4}{10}, \frac{9}{10}, \dots, \frac{100}{10}, \dots, \frac{10000}{10}, \dots$

當  $n$  愈大時，各項的值愈大，不會趨近於任何定值，故此數列發散

**例題 5 判斷無窮等比數列是否收斂**

試判斷下列各數列是否收斂：

(1)  $\left\langle \left(\frac{5}{4}\right)^n \right\rangle$ 。(5分)

(2)  $\langle (-0.6)^n \rangle$ 。(5分)

**解**

(1) 公比為  $r = \frac{5}{4} > 1$

∴此數列發散

(2) 公比  $r = -0.6$

滿足  $-1 < r < 1$  條件

∴此數列收斂

**例題 6 極限的四則運算**

試求下列各無窮數列的極限：

(1)  $\left\langle 4 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2} \right\rangle$ 。(5分)

(2)  $\left\langle \left(\frac{3n+1}{n}\right)\left(\frac{7n-2}{4n}\right) \right\rangle$ 。(5分)

**解**

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 4 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 4 + 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} - 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}$$
$$= 4 + 0 - 0 = 4$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left(\frac{3n+1}{n}\right)\left(\frac{7n-2}{4n}\right) \right)$$
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{n}\right) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7n-2}{4n}\right)$$
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{n}\right) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{4} - \frac{2}{4n}\right)$$
$$= 3 \times \frac{7}{4} = \frac{21}{4}$$

**例題 7** 以  $\Sigma$  表示級數試將下列級數用  $\Sigma$  表示：

- (1) 等差級數  $2 + 6 + 10 + 14 + \cdots + 222$ 。(5分)  
 (2) 等比級數，首項為 3，公比為 2，共有 30 項。(5分)

**解** (1) 此級數一般項為  $a_k = 2(2k - 1) = 4k - 2$ 

末項  $a_n = 222$

則  $4n - 2 = 222 \Rightarrow n = 56$

$\therefore$  此級數為  $\sum_{k=1}^{56} (4k - 2)$

- (2) 此級數一般項為
- $a_k = 3 \times 2^{k-1}$

故此級數為  $\sum_{k=1}^{30} (3 \times 2^{k-1})$

**例題 8**  $\Sigma$  的運算性質已知  $\sum_{k=1}^{10} a_k = 12$ ， $\sum_{k=1}^{10} b_k = 36$ 。試求：

(1)  $\sum_{k=1}^{10} (4a_k + 3)$ 。(5分)

(2)  $\sum_{k=1}^{10} (2a_k + b_k - 5)$ 。(5分)

**解** (1)  $\sum_{k=1}^{10} (4a_k + 3) = 4 \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} 3$

$= 4 \times 12 + 10 \times 3 = 78$

(2)  $\sum_{k=1}^{10} (2a_k + b_k - 5) = 2 \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} b_k - \sum_{k=1}^{10} 5$

$= 2 \times 12 + 36 - 10 \times 5 = 10$

### 例題 9 無窮等比級數求和

- (1) 試求無窮等比級數  $\frac{2}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{2}{5}\right)^n + \cdots$  的和。(5分)
- (2) 試求無窮等比級數  $1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{8}{27} + \cdots$  的和。(5分)

**解** (1) 首項為  $\frac{2}{5}$ ，公比為  $\frac{2}{5}$

$$\text{由求和公式得 } \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{2}{3}$$

(2) 首項為 1，公比為  $-\frac{2}{3}$

$$\text{由求和公式得 } \frac{1}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{3}{5}$$

### 例題 10 將循環小數化為有理數

試將下列循環小數化為有理數：

- (1)  $2.\overline{54}$ 。(5分)
- (2)  $0.4\overline{6}$ 。(5分)

**解** (1)  $2.\overline{54} = 2.545454\cdots = 2 + 0.54 + 0.0054 + 0.000054 + \cdots$

$$= 2 + \frac{54}{100} + \frac{54}{10000} + \frac{54}{1000000} + \cdots = 2 + \frac{\frac{54}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = 2 + \frac{54}{99}$$

$$= 2 + \frac{6}{11} = \frac{28}{11}$$

(2)  $0.4\overline{6} = 0.4666\cdots$

$$= 0.4 + 0.06 + 0.006 + 0.0006 + \cdots$$

$$= \frac{4}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \frac{6}{10000} + \cdots$$

$$= \frac{4}{10} + \frac{\frac{6}{100}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{2}{5} + \frac{\frac{6}{100}}{\frac{9}{10}} = \frac{2}{5} + \frac{1}{15} = \frac{7}{15}$$