第3章 積　分

重點整理

一、反導函數與不定積分

1. 反導函數：

若函數滿足 $F'(x)=f(x)$，則稱 $F(x)$ 為 $f(x)$ 的一個反導函數。

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, bend left, "\text{導函數(微分)}"] & f\,(=F') \arrow[l, bend left, "\text{反導函數(積分)}"] \end{tikzcd}$$

例：試求 $f(x)=2x+3$ 的反導函數。

首先觀察 $(x^2+3x)'=2x+3$，$(x^2+3x+1)'=2x+3$，

$(x^2+3x+4)'=2x+3$，$(x^2+3x-6)'=2x+3$，

所以，形如 x^2+3x+C 的函數都可以是 $2x+3$ 的反導函數，其中 C 為任意常數。

2. 多項式函數的不定積分：

$$\int(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0)\,dx$$

$$=\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_{n-1}}{n}x^n+\cdots\cdots+\frac{a_2}{3}x^3+\frac{a_1}{2}x^2+a_0x+C$$，其中 C 為任意常數。

例：$\int(x^2+3x-4)\,dx=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-4x+C$，其中 C 為任意常數。

3. 成本函數與邊際成本函數：

經濟學中，成本函數的導函數為邊際成本函數。

反過來說，邊際成本函數的反導函數是成本函數。

例：已知成本函數 $f(x)=x^3-15x^2+18x+6$，則其邊際成本函數為

$f'(x)=3x^2-30x+18$。

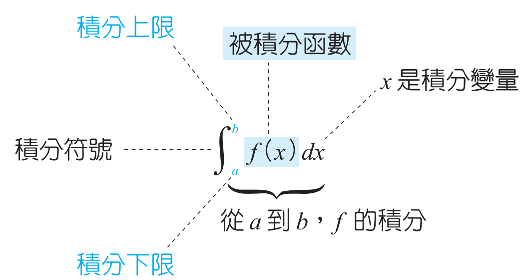
例：已知邊際成本函數 $f(x)=20x^3-16x+3$，則其成本函數為

$\int(20x^3-16x+3)\,dx=5x^4-8x^2+3x+C$，其中 C 為任意常數。

二、定積分

1. 定積分的定義：

連續函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 到 $x=b$ 的定積分符號如下：



2. 定積分的計算—微積分基本定理：

設 $F(x)$ 是多項式函數 $f(x)$ 的一個反導函數，則 $f(x)$ 在 $x=a$ 到 $x=b$ 的定積分為 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$，也就是 $\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$。

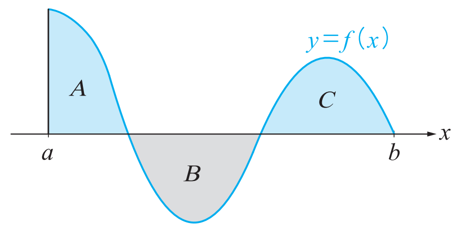
例：欲求定積分 $\int_1^2(2x+3)dx$ 的值，首先找到 $2x+3$ 的一個反導函數 $F(x)=x^2+3x$，其次，計算 $F(2)-F(1)=(4+6)-(1+3)=6$ 即為所求。

3. 定積分與面積：

(1) 若在 $[a, b]$ 都有 $f(x)\geq 0$，則定積分 $\int_a^b f(x)dx$ 就是函數 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 與 x 軸所圍區域的面積。

(2) 若在 $[a, b]$ 都有 $f(x)\leq 0$，則定積分 $\int_a^b f(x)dx$ 就是函數 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 與 x 軸所圍區域的面積之負值。

(3) 當被積分函數 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 的值有正有負時，定積分的結果是（x 軸上方的面積）−（x 軸下方的面積），如下圖，$\int_a^b f(x)dx=A-B+C$。



4. 定積分與總變化量：

總量等於變化率的積分。

例：運動物體在某段時間內位移的總量，就是該段時間內速度函數的積分。

例：某產品在某段時間內生產的總數量，就是該時段內生產速率函數的積分。

5. 區間內函數值的平均：

若函數 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上連續，則 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 的平均值為 $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$。

例：$f(x)=x^3$ 在區間 $[1, 3]$ 的平均值為

$$\frac{1}{3-1}\int_1^3 x^3dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_1^3=\frac{1}{2}\left(\frac{81}{4}-\frac{1}{4}\right)=10。$$

三、消費者剩餘與生產者剩餘

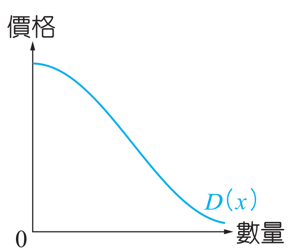
1. 消費者剩餘（consumer surplus）：

從消費者觀點來看：

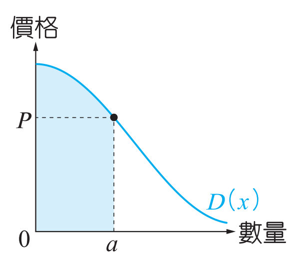
銷售量為 x，商品價格 $D(x)$ 稱為此商品的需求函數，通常是遞減函數，如圖(一)。

銷售量為 a 時，商品潛在總價值為 $\int_0^a D(x)dx$，假設以固定價格 P 購買，則付出 aP。如圖(二)。

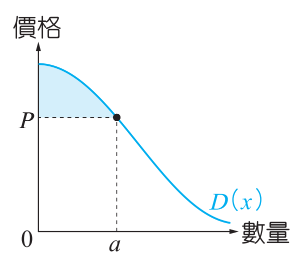
$\int_0^a D(x)dx$ 與 aP 的差額，即 $\int_0^a D(x)dx-aP$，稱為消費者剩餘，如圖(三)。



圖(一)



圖(二)



圖(三)

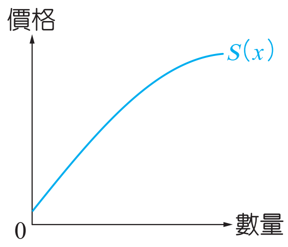
2. 生產者剩餘（producer surplus）：

從生產者觀點來看：

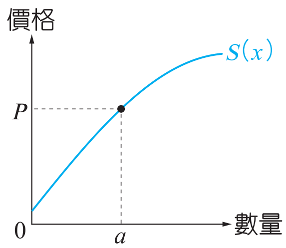
供應量為 x，商品價格 $S(x)$ 稱為此商品的供給函數，通常是遞增函數，如圖㈣。

供應量為 a 時，收入為 $\int_0^a S(x)\,dx$，假設以固定價格 P 出售，則收入為 aP。如圖㈤。

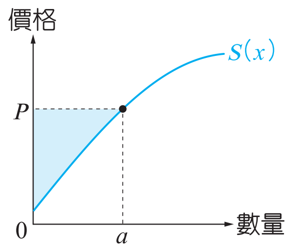
aP 與 $\int_0^a S(x)\,dx$ 的差額，即 $aP-\int_0^a S(x)\,dx$，稱為生產者剩餘，如圖㈥。



圖㈣



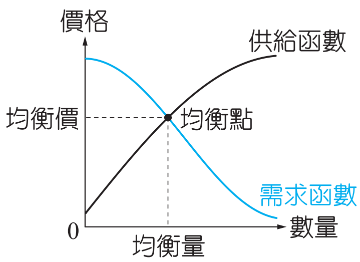
圖㈤



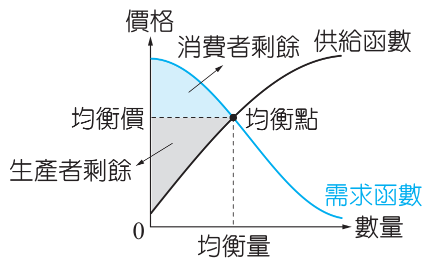
圖㈥

3. 供需平衡：

如圖㈦，需求函數與供給函數圖形的交點稱為均衡點，其 x 坐標是市場均衡時的銷售量，y 坐標則為此時的銷售價格。



圖㈦



圖㈧

如圖㈧，消費者剩餘與生產者剩餘合稱總剩餘。

例題 1 多項式函數的不定積分

(1) 試求 $\int(4x-3)\,dx$。(5 分)

(2) 試求 $\int(2x^2-3x+1)\,dx$。(5 分)

解 (1) $\int(4x-3)\,dx=2x^2-3x+C$,其中 C 為任意常數

(2) $\int(2x^2-3x+1)\,dx=\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+x+C$,其中 C 為任意常數

3

例題 2 多項式函數的定積分

(1) 試求 $\int_{-2}^{1}2x\,dx$。(5 分)

(2) 試求 $\int_{3}^{5}(3x+2)\,dx$。(5 分)

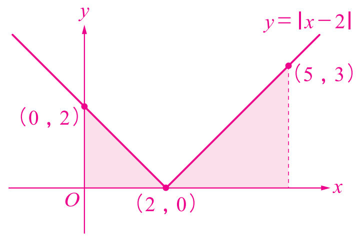
解 (1) $\int_{-2}^{1}2x\,dx=x^2\Big|_{-2}^{1}=1-4=-3$

(2) $\int_{3}^{5}(3x+2)\,dx=\left(\dfrac{3}{2}x^2+2x\right)\Big|_{3}^{5}=\left(\dfrac{75}{2}+10\right)-\left(\dfrac{27}{2}+6\right)=28$

例題 3　用面積計算定積分

(1) 試求定積分$\int_0^5 |x-2|\,dx$。（5 分）

(2) $f(x)=\begin{cases} 2，x\geq 2 \\ x，x<2 \end{cases}$，試求定積分 $\int_0^4 f(x)\,dx$。（5 分）

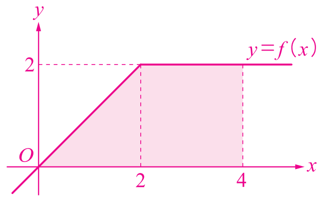


解 (1) $\int_0^5 |x-2|\,dx$ 為函數 $y=|x-2|$ 在 $[0，5]$ 與 x 軸所圍的面積

故得 $\int_0^5 |x-2|\,dx=\frac{1}{2}\times 2\times 2+\frac{1}{2}\times 3\times 3=\frac{13}{2}$

(2) $\int_0^4 f(x)\,dx$ 為函數 $f(x)$ 在 $[0，4]$ 與 x 軸所圍的面積

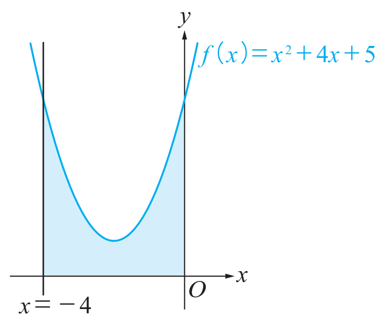
故得 $\int_0^4 f(x)\,dx=\frac{1}{2}\times 2\times 2+2\times 2=6$



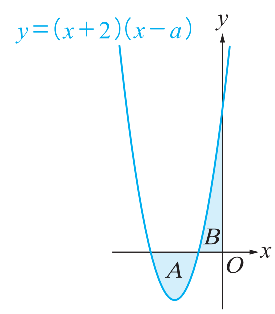
例題 4　函數圖形與 x 軸在特定區間內所圍區域的面積

(1) 如圖(一)，試求函數 $f(x)=x^2+4x+5$ 在 $x=-4$ 到 $x=0$ 之間與 x 軸所圍的區域面積。（5 分）

(2) 設 $a<-2$，若圖(二)為二次函數 $y=(x+2)(x-a)$ 的圖形，且 A 區域與 B 區域的面積相等，試求 a 值。（5 分）



圖(一)



圖(二)

解 (1) $\int_{-4}^0 (x^2+4x+5)\,dx$

$=\left(\frac{1}{3}x^3+2x^2+5x\right)\Big|_{-4}^{0}=0-\left(-\frac{64}{3}+32-20\right)=\frac{28}{3}$

(2) 令 $(x+2)(x-a)=0$，得 $x=-2$ 或 a

故知此二次函數圖形與 x 軸交於點 $(a，0)$ 與 $(-2，0)$

$\because$ A 區域與 B 區域的面積相等

$\therefore \int_a^{-2}((x+2)(x-a))\,dx=-\int_{-2}^{0}((x+2)(x-a))\,dx$

則 $\int_a^0 (x^2+(2-a)x-2a)\,dx=0$

得 $\left(\frac{x^3}{3}+\frac{2-a}{2}\times x^2-2ax\right)\Big|_a^0=0$，即 $\frac{a^3}{3}+\frac{2-a}{2}\times a^2-2a^2=0$

整理得 $2a^3+3(2-a)a^2-12a^2=0 \Rightarrow a^3+6a^2=0 \Rightarrow a^2(a+6)=0 \Rightarrow a=0$ 或 -6

但 $a<-2$，故 $a=-6$

例題 5　生產速率、時間與產量的關係

某工廠每天上午 9 時準時開工，連續生產 8 小時後，於下午 5 時收工，開工 x 小時後的生產速率為 $f(x)=-0.03x^2+0.18x+1.73$，$0\le x\le 8$，（單位：千個／小時）。試求：

⑴ 從上午 9 時至 11 時為止生產的數量。（5 分）

⑵ 下午 3 時至 5 時生產的數量。（5 分）

解 ⑴ 依題意計算 $x=0$ 至 $x=2$ 的產量

$$\int_0^2(-0.03x^2+0.18x+1.73)dx$$
$$=(-0.01x^3+0.09x^2+1.73x)\Big|_0^2$$
$$=-0.08+0.36+3.46=3.74(\text{千個})$$

故所求為 3740 個

⑵ 依題意計算 $x=6$ 至 $x=8$ 的產量

$$\int_6^8(-0.03x^2+0.18x+1.73)dx$$
$$=(-0.01x^3+0.09x^2+1.73x)\Big|_6^8$$
$$=(-5.12+5.76+13.84)-(-2.16+3.24+10.38)$$
$$=14.48-11.46=3.02(\text{千個})$$

故所求為 3020 個

例題 6　邊際成本問題

某農產加工廠根據過去的資料得知，生產 100 箱產品的成本為 160000 元，生產 x 箱產品的邊際成本為 $f(x)=1600-2x$，但每天至多生產 240 箱。試問：

⑴ 由生產量 100 箱增加到 120 箱時，成本增加了多少元？（5 分）

⑵ 原生產量為 100 箱，如果達到當天最高產量（240 箱），成本增加了多少元？（5 分）

解 ⑴ 由 100 箱增加至 120 箱所增加的成本為

$$\int_{100}^{120}(1600-2x)dx=(1600x-x^2)\Big|_{100}^{120}$$
$$=(192000-14400)-(160000-10000)$$
$$=177600-150000$$
$$=27600(\text{元})$$

⑵ 由 100 箱增加至 240 箱所增加的成本為

$$\int_{100}^{240}(1600-2x)dx=(1600x-x^2)\Big|_{100}^{240}$$
$$=(384000-57600)-(160000-10000)$$
$$=326400-150000$$
$$=176400(\text{元})$$

3

翰林用心教師用精益求精

例題 7　平均成本

某工廠生產小型風扇，每天產量不超過 250 個。若已知成本可表示為函數 $f(x)=-0.003x^2+0.6x+200$（單位：元），$0\leq x\leq 250$。試問：

⑴ 在 $x=0$ 到 $x=120$ 之間每個產品的平均成本。（5 分）

⑵ 在 $x=0$ 到 $x=250$ 之間每個產品的平均成本。（5 分）

解 ⑴ 在 $x=0$ 到 $x=120$ 之間每個產品的平均成本為

$$\frac{1}{120}\int_0^{120}(-0.003x^2+0.6x+200)dx$$

$$=\frac{1}{120}(-0.001x^3+0.3x^2+200x)\Big|_0^{120}$$

$$=\frac{1}{120}(-1728+4320+24000)=221.6\text{（元）}$$

⑵ 在 $x=0$ 到 $x=250$ 之間每個產品的平均成本為

$$\frac{1}{250}\int_0^{250}(-0.003x^2+0.6x+200)dx$$

$$=\frac{1}{250}(-0.001x^3+0.3x^2+200x)\Big|_0^{250}$$

$$=\frac{1}{250}(-15625+18750+50000)=212.5\text{（元）}$$

例題 8　銷售商品的潛在總價值

某商品的需求函數為 $f(x)=100-0.02x$，試求此商品在銷售量 0 到 600 時，銷售商品的潛在總價值。（5 分）

解 $\int_0^{600}(100-0.02x)dx$

$=(100x-0.01x^2)\Big|_0^{600}$

$=60000-3600$

$=56400$

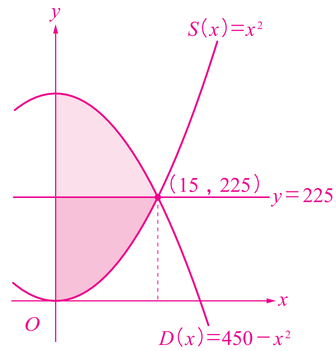
例題 9　消費者剩餘、生產者剩餘與總剩餘

某商品的需求函數為 $D(x)=450-x^2$，供給函數為 $S(x)=x^2$。在市場均衡的狀態下，試求：

(1) 消費者剩餘。（5 分）

(2) 生產者剩餘。（5 分）

(3) 總剩餘。（5 分）



解　市場達供需均衡的價格為兩函數圖形交點的 y 坐標

令 $450-x^2=x^2$，移項得 $2x^2=450 \Rightarrow x=15$，代入得 $y=225$

(1) 消費者剩餘為

$$\int_0^{15}(450-x^2)\,dx-15\times 225$$

$$=\left(450x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{15}-3375$$

$$=6750-1125-3375=2250$$

(2) 生產者剩餘為

$$15\times 225-\int_0^{15}x^2\,dx$$

$$=3375-\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{15}$$

$$=3375-1125=2250$$

(3) 總剩餘為

$$2250+2250=4500$$

例題 10　微積分基本定理的應用

設二次函數 $y=f(x)$ 的圖形在點 $P(x，y)$ 處的切線斜率為 $2x+2$，且此函數過點 $(0，5)$，試求此函數。（10 分）

解　由已知，$f'(x)=2x+2$ 且 $f(0)=5$

$\because f(x)$ 是 $f'(x)$ 的反導函數

由微積分基本定理得 $f(x)-f(0)=\int_0^x(2t+2)\,dt=(t^2+2t)\Big|_0^x=x^2+2x$

可得 $f(x)=x^2+2x+f(0)=x^2+2x+5$

〈另解〉

由已知，$f'(x)=2x+2$

可得 $f'(x)$ 的反導函數 $f(x)=\int(2x+2)\,dx=x^2+2x+C$，其中 C 為常數

$\because f(x)$ 的圖形過點 $(0，5)$　$\therefore f(0)=5$，即 $C=5$

故得 $f(x)=x^2+2x+5$